Liebe Leserin, lieber Leser,

was wäre die Astronomie ohne Mathematik? Sie ist hilfreich: Da wird in der ersten Nacht des 19. Jahrhunderts endlich der langgesuchte Planet zwischen Mars und Jupiter dingfest gemacht, die Ceres. Doch nach nur 40 Tagen geht der glänzende Fund im Glanz der Sonne verloren. Das ist die Stunde des Carl Friedrich Gauß (1777–1855). Ihm gelingt das schier Unmögliche. Aus den 22 Positionsmessungen (9° am Himmel!) berechnet er die Ellipsenbahn der Ceres, so dass deren Wiederauffindung im Dezember 1801 durch Franz Xaver von Zach (Gotha) und Heinrich Wilhelm Olbers (Bremen) nichts im Wege steht. Gauß' Stern erglänzt am Ruhmeshimmel. Dem Erfolg folgt die Berufung: zum Professor an der Universität und zum Direktor der Göttinger Sternwarte. Trotz lukrativer Angebote (u. a. aus Berlin) blieb Gauß seinem Göttingen treu.

Vor 200 Jahren, 1809, erscheint sein Werk *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium* über die Kegelschnittbahnen der Himmelsköper. Darin geht er auch auf ein mathematisches Verfahren der Ausgleichsrechnung ein: die *Methode der kleinsten Quadrate*. Zweifellos ist Gauß der Erfinder. Bereits mit 18 Jahren (1795) sei er auf „seine Methode“ gestoßen. Getreu seinem Wahlspruch „Weniges, aber Reifes“ (Pauca sed matura) hat er lange mit der Veröffentlichung gezögert, zu lange. 1805 hatte bereits ein anderer, der französische Gelehrte Adrien-Marie Legendre (1752–1833), die Methode publik gemacht.

Wie man inzwischen weiß, ist in sehr vielen Fällen die Gaußsche Methode der kleinsten Quadrate das beste Verfahren überhaupt, um an fehlerbehafte Messungen ein mathematisches Modell anzupassen.

Gauß' Ruhm als „Erster unter den Mathematikern“ leuchtet lange nach. Auf dem letzten 10-DM-Schein der Bundesrepublik ist er zu sehen mitsamt der „Normalverteilung“, der Gaußschen „Glockenkurve“. Die Normalverteilung begegnet uns auf Schritt und Tritt, überall. (Bloß beim Gelde gelten meist andere Verteilungsgesetze. Reichtum ist nicht normalverteilt.) Übrigens soll Gauß bei pekuniären Angelegenheiten eine glückliche Hand gehabt haben. Er starb jedenfalls nicht, wie sein großes Gegenüber Legendre, als armer Mann.

Viel späten Sommer wünscht Ihnen

Ihr Hans-Erich Fröhlich

Der Himmel im September

Gleich am 2. September haben Venus und Jupiter interessante Begegnungen. In den Morgenstunden wandert die Venus gemessenen Schrittes an der „Krippe“ (Praesepe) vorbei, in den Abendstunden des gleichen Tags der Mond am Jupiter. Am 13. kommt es sogar (allerdings nicht in Deutschland sichtbar) zu einer Planetenbedeckung: Der Mond unterbindet für eine kleine Weile den Sichtkontakt zum Mars.

Eine Opposition haben wir auch. Am 17. September ist es der Uranus, der um Mitternacht im Süden brilliert, falls man eine Helligkeit von 5,7 Größenklassen als brillant bezeichnen kann. Sollten Sie Schwierigkeiten haben, den Uranus unter den Sternen auszumachen, am 5. September gibt es eine himmlische Hilfe: Uranus steht dann 5 Grad südlich des Mondes.

Bemerkenswert und immer im September: der Herbstanfang. Am 22. September um 22 Uhr (MEZ) ist es wieder so weit, und die Nacht gewinnt für ein halbes Jahr die Oberhand über den Tag. Einen Astronomen sollte das nicht schrecken!

Jupiter und Neptun sind noch günstig, Mars arbeitet kontinuierlich an der Verbesserung seiner Sichtbarkeit. Er ist bereits vor Mitternacht auf den Beinen.

Sie sehen, kein astronomisches Ereignis hindert Sie am Wahltage daran, wählen zu gehen.

Die Methode der kleinsten Quadrate

Was täten Sie? Sie haben 22 gemessene Positionen am Himmel, also 44 mit Messfehlern behaftete Zahlenwerte samt dazugehörigen Messzeiten, und sollen daraus die sechs Parameter einer Keplerellipse bestimmen: Bahnneigung, Länge des aufsteigenden Knotens, Abstand des Perihels vom aufsteigenden Knoten, große Halbachse, Exzentrizität und Durchgangszeit durch das Perihel. Offenbar ist das Problem, es ist das Ceres-Problem, überbestimmt. Es wird keine einzige Lösung geben, zu der alle gemessenen Positionen exakt passen. Statt dessen gibt es unendlich viele Lösungen, die mehr oder weniger mit den Messungen verträglich sind. Welche nimmt man? Ich wüsste, was ich täte. Ich würde einfach möglichst viele Lösungen nach einem Zufallsprinzip auswählen und ausprobieren, ob und wie gut sie passen. Dazu würde ich Dutzende von sog. Markow-Ketten auf die Reise durch den 6-dimensionalen Parameterraum schicken. Auf diese Weise bekäme ich nach wenigen Minuten die Erwartungswerte aller Bahnelemente heraus, und das mit Fehlerbalken. Doch dazu braucht man einen Computer. Gauß, in Ermangelung eines selbigen, musste noch seinen Kopf anstrengen. Und das hatte bemerkenswerte Folgen.

Für die Berechnung der Ceresbahn soll er übrigens 100 Stunden benötigt haben. Später, bei der Vesta, schaffte er es in nur zehn Stunden Rechenarbeit.

Seine Idee: Man wähle die Lösung aus, wo die Summe der Quadrate aus den Differenzen zwischen den gemessenen Koordinaten und den berechneten minimal wird. Warum gerade die quadratischen Abweichungen und nicht einfach die Absolutbeträge? Warum nicht einfach die größte Abweichung minimieren. Man könnte sich beliebig viele Möglichkeiten ausdenken, um zu einer eindeutigen Lösung zu gelangen. Gibt es überhaupt ein bestes Verfahren und in welchem Sinne ist es das beste?

Seit Anfang des vorigen Jahrhunderts wissen wir es genau. Die Mathematik, sprich Herr Markow, hat herausgefunden und in aller Strenge bewiesen, dass die Gaußsche Methode der kleinsten Quadrate in der Tat unter ziemlich allgemeinen Voraussetzungen (für sog. lineare Modelle) das beste Schätzverfahren überhaupt ist, was man sich denken kann. Noch nicht einmal Normalverteiltheit der Messfehler muss vorausgesetzt werden!

Warum die Normalverteilung, die Gaußsche Glockenkurve, so verbreitet ist? Sie beschreibt die Häufigkeitsverteilung der Abweichungen. Große Abweichungen sind danach, egal nach welcher Seite, selten. Der Mittelwert ist repräsentativ, er hat die höchste Wahrscheinlichkeit, ist der Gipfel der Glockenfunktion.

Nun, eine Normalverteilung ergibt sich immer dann, tragen sehr viele kleine Zufallsereignisse in ihrer Summe zu einem Ergebnis bei. Das ist bei Messungen mit zufälligen Einflüssen (Fehlern) fast immer der Fall. Auch anderweitig ist sie bemerkenswert: Sind von einer Zufallsgröße lediglich Mittelwert und Streuung bekannt, so ist sie die Verteilungsfunktion mit dem geringsten Informationsgehalt. Jede andere Verteilung wäre informativer. Gasatome in einem

Behältnis wissen das. Ihre mittlere Geschwindigkeit ist die des Behälters, also Null, ihr mittleres Geschwindigkeitsquadrat (bis auf einen Faktor) die Temperatur. Mehr ist dazu nicht zu sagen (ein Minimum an Information!), also ist die Geschwindigkeitsverteilung notwendigerweise Gaußsch.

Die Normalverteilung ist eine Erfahrung, die tief in uns verwurzelt ist. Die Glockenkurve scheint eingraviert, das Normale eben. Weil sie unserem Bedürfnis nach Sicherheit entgegenkommt? Jede einschneidende Abweichung vom Mittel hat, bitteschön, zu unterbleiben. Jedenfalls fällt es uns schwer, Nicht-Gaußsche Verteilungen instinktiv zu akzeptieren. Nehmen sie die Turbulenz. Die Gaußverteilung verbietet große Abweichungen von einigen Sigma, wie man sagt, jedenfalls sind die extrem unwahrscheinlich. Nicht so bei Turbulenzen! Da haben selbst schlimme Abweichungen eine Chance, beim Wetter wie an der Börse. Überhaupt die Ökonomie. Die ist bekannt für *schiefe* Verteilungen. Dass ein *mittleres* Einkommen nicht unbedingt *repräsentativ* sein muss, kann uns nun nicht mehr schrecken.

Ich selbst hatte vor Jahren ein Aha-Erlebnis der Nicht-Gaußschen Art. Will man das Weltalter aus der Expansion des Kosmos schätzen, braucht man bloß von möglichst vielen Sternsystemen, deren Entfernungen und Fluchtgeschwindigkeiten man kennt, sich auszurechnen, wann die „hier“ waren. Um sicherzugehen, nehme ich den Mittelwert aus all den berechneten Quotienten (Entfernung/Fluchtgeschwindigkeit). Dummerweise existiert dieser Mittelwert gar nicht, sofern beide Messgrößen, Entfernungen wie Fluchtgeschwindigkeiten, mit Gaußschen Fehlern behaftet sind. Das ist im Nachhinein kein Wunder, gibt es doch auch Sternsysteme, die zufällig auf uns zurasen. Eine zufälligerweise „stehende“ Galaxie machte das Mittel kaputt, da ihr Beitrag zum Weltalter unendlich groß wäre. Doch keine Bange, das Weltalter ist trotzdem wohl definiert. (Inzwischen aus ganz anderen Quellen.) In unserem Beispiel (einer sog. Cauchyverteilung) mag es keinen Mittelwert geben, aber dafür einen *Median*. Der tut es auch.

Gauß’ Gehirn weist im übrigen keinerlei Besonderheiten auf. Dem Genie ist anatomisch nicht beizukommen.