

**Liebe Leserin, lieber Leser,**

haben Sie von Vilfredo Federico<sup>1</sup> Pareto (1848–1923) gehört? Es heißt, dem Eisenbahningenieur und Gelehrten sei 1896 aufgefallen, dass 80% der Erbsenernte aus dem Garten von nur 20% der Schoten stammen. „Erbsenzählen“ stand am Anfang von Paretos 80-20-Regel. Er fand sie vielerorten bestätigt, u. a. bei der schiefen Verteilung von Reichtum. Diese Schiefelage sei universell, unabhängig von Ort und Zeit, meinte Pareto. Die mathematische Formulierung führt auf die Pareto-Verteilung, ein Potenzgesetz: Die Anzahl der Menschen mit einem Vermögen  $W$  zwischen  $W$  und  $W + dW$  fällt wie  $W^{-\alpha}$  ab. Das ist typisch für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Größen, die keinen typischen Wert kennen. In Geographie, Geophysik und Astronomie trifft dies u. a. auf die Häufigkeitsverteilung der Größe von Städten zu, der Stärke von Erdbeben in der nach oben offenen Richter-Skala, der Energiefreisetzung von Sonnen- und Sternflares, aber auch auf die Häufigkeitsverteilung der Masse von Sternen.

Aktueller Anlass, die Pareto-Verteilung vorzustellen, ist eine Meldung, die just zur Weltwirtschaftskonferenz in Davos kursierte und für Diskussionen sorgte: Ein Prozent der Weltbevölkerung teile sich in fast die Hälfte des Weltreichtums. Das ist besorgniserregend – und doch bloß eine Umformulierung von Paretos 80-20-Regel: Entfallen 80% des Reichtums auf 20% der Bevölkerung, nennen wir sie die „Begüterten“, dann trifft dies auf die Begüterten ebenfalls zu: 80% von 80%, also 64% des Weltreichtums, entfallen auf 20% von 20%, also 4% der Weltbevölkerung. Nur 20% der Begüterten können als reich gelten. In einem weiteren Schritt stellt sich heraus, dass – die Gültigkeit der 80-20-Regel vorausgesetzt – sich 0,8% (20% von 4%) der Weltbevölkerung in 51,2% (80% von 64%) des Weltvermögens teilen. Mit etwas Mathematik findet man heraus, dass auf 1% der Bevölkerung mehr als die Hälfte, nämlich 52,8%, des Reichtums entfallen. Die Zuspitzung „50-1“ war gut gemeint, hält aber einer kritischen Prüfung nicht stand. Die Schere zwischen Arm und Reich hat sich seit 1896 zumindest nicht geöffnet! Mir sagt die Formulierung „80-20“ formal zu. Sie erlaubt zwei Lesarten: 80% der Menschen

---

<sup>1</sup>Aus Begeisterung für die 48-er Revolution in Deutschland ließen die italienischen Eltern ihr Söhnchen auf den Namen Wilfried Fritz taufen.

teilen sich in 20% des Reichtums, und 20% der Menschen teilen sich in 80% des Reichtums.

Eine Erklärung für diese Ungleichheit haben Ökonomen bisher nicht gefunden. Formal betrachtet bietet sich ein Potenzgesetz allerdings an: Für Reichtum gibt es keine charakteristische Größe<sup>2</sup>, und die Gestalt der Verteilung darf nicht von der zufällig gewählten Währung abhängen! Die Kluft zwischen Arm und Reich ist im übrigen die gleiche wie zwischen Reich und Steinreich. Skalenfrei<sup>3</sup> nennt man ein solches Verhalten. Warum aber gerade 80-20 und nicht 90-10 oder gar 99-1? (Die entsprechenden Pareto-Exponenten unterschieden sich nur unwesentlich:  $\alpha = 2,161$  bzw.  $2,048$  und  $2,002$ .)

Falls Sie noch nicht an Zahlenmystik glauben: Auf was für eine Regel führte eigentlich  $\alpha = 3$ ? – auf eine 61,8-38,2-Regel. Sie lesen richtig: Das wäre eine Teilung nach dem goldenen Schnitt!

Was, wenn alles Zufall wäre, wobei „Zufall“ für unser Unvermögen steht, das komplizierte Geflecht ökonomischer Beziehungen zu durchschauen? Für eine solche Sicht spricht: Es gibt genau eine Möglichkeit, den Reichtum der Welt gerecht zu verteilen, aber eine Unzahl von Möglichkeiten<sup>4</sup> der Ungleichverteilung! Womöglich ist die beobachtete Verteilung nahe derjenigen mit den meisten Realisierungsmöglichkeiten. Entropiemaximierung nennt man das. Auch wenn die Pareto-Verteilung – geht es um Geld und Gut – ungerecht ist, u n n a t ü r l i c h ist sie nicht.

In der Schule hat man uns die Gauss-Verteilung (Normalverteilung) gelehrt. Die Gauss'sche Glockenkurve auf dem letzten 10-DM-Schein gaukelt eine Welt vor, wo katastrophale Ausrutscher nach oben wie unten gleich unwahrscheinlich sind. Die Wirklichkeit schaut anders aus ...

Trotzdem viel Freude bei der Lektüre wünscht

Hans-Erich Fröhlich

---

<sup>2</sup>Von einer mittleren Körpergröße zu sprechen macht Sinn, von einem mittleren Einkommen oder gar Besitz zu sprechen macht wenig Sinn.

<sup>3</sup>Newtons  $1/r^2$ -Gesetz zeichnet auch keine „Längenskala“ aus, weshalb man sich nicht wundern muss, dass es unser Planetensystem eventuell auch „in klein“ gibt.

<sup>4</sup>Nehmen Sie drei Euromünzen. Es gibt zehn Möglichkeiten, diese auf drei unterscheidbare Personen zu verteilen. Eine einzige davon ist „gerecht“!

## Der Himmel im Februar

Venus ist Abendstern. In diesem Zusammenhang sei daran erinnert, dass vor 25 Jahren, am 10. Februar 1990, die Jupitersonde Galileo in 16 000 km Höhe an der Venus vorbeischoss. Das brachte den nötigen Schwung, damit sie Ende 1995 ihr Ziel, den Jupiter, erreichte. (Zuvor musste sie allerdings noch zwei Erdvorbeiflüge absolvieren.) Galileo übermittelte u. a. 81 Nahaufnahmen der Wolkenhülle der Venus.

Mars geht nach wie vor kurz nach 20 Uhr unter. Am 21. Februar ziehen Venus und Mars in einem halben Grad Abstand aneinander vorbei.

Jupiter steht am 6. Februar in Opposition zur Sonne. Er ist die ganze Nacht über sichtbar. Ab dem 4. Februar befindet er sich im Sternbild Krebs. Saturn ist der Planet für die Morgenstunden.

## Pareto-Verteilungen in der Astronomie

Massereiche Sterne, wie die drei Gürtelsterne des Orion, sind zwar selten, trotzdem ist die Wahrscheinlichkeit hoch, dass sich ein willkürlich herausgegriffenes Wasserstoffatom (zumindest zeitweilig) in einem massereichen Stern aufhält bzw. aufgehalten hat. (Ein x-beliebiger Euro findet sich auch bevorzugt in der Börse eines Reichen wieder.)

1955 fiel dem Astronomen Edwin Salpeter (1924–2008) auf, dass die Häufigkeitsverteilung der Sternmasse, abgeleitet aus der beobachteten Häufigkeitsverteilung der Leuchtkräfte, einem Potenzgesetz<sup>5</sup> zu folgen scheint. Salpeter fand für den (Pareto-)Exponenten einen Wert von  $\alpha = 2,35$ . Was das heißt? Nun, Sterne mit einer Masse zwischen 0,9 und 1,1 Sonnenmassen entstehen fünfmal häufiger als Sterne mit einer Masse zwischen 1,9 und 2,1 Sonnenmassen.

An dem empirisch ermittelten Exponenten hat sich seit 1955 kaum etwas geändert. Allerdings sieht man das Massespektrum entstehender Sterne inzwischen differenzierter. In der Verteilungsfunktion gibt es bei etwa einer

---

<sup>5</sup>Das Problem dabei ist, dass extrem massereiche Sterne viel zu selten sind, als dass das Massespektrum im oberen Bereich statistisch einwandfrei zu ermitteln wäre. Hinzu kommt, dass es sich meist um Doppel- bzw. Mehrfachsterne handelt. Mathematisch interessant ist übrigens der Grenzfall  $\alpha = 2$ . Im Masseintervall 1...10 befände sich dann genau so viel Gesamtmasse wie im Intervall 10...100 Sonnenmassen.

halben Sonnenmasse einen Knick. (Es existiert also eine irgendwie ausgezeichnete Sternenmassen, was natürlich dem Prinzip der Skalenfreiheit zuwiderläuft.) Der Häufigkeitsabfall verläuft für Sterne oberhalb einer halben Sonnenmasse etwas flacher als von Salpeter angegeben. Man rechnet jetzt mit einem  $\alpha$  von 2,3. (Mit diesem Exponenten entfällt die Hälfte der Gesamtmasse aller Sterne [schwerer als eine halbe Sonnenmasse] auf die massereichsten 5% aller dieser Sterne. Das sind Sterne mit einer Anfangsmasse über fünf Sonnenmassen.)

Die Kenntnis des  $\alpha$ -Wertes, seiner Orts- und Zeitabhängigkeit, ist wichtig für ein Verständnis der chemischen Evolution in der Galaxis und im Universum. Nur massereiche Sterne erzeugen in ihrem kurzen Leben jene schweren Elemente jenseits von Kohlenstoff und Sauerstoff im Periodensystem, die beispielsweise für den Bau von Planeten in Frage kommen. Es ist der  $\alpha$ -Wert, der den Anteil massereicher Sterne in einer Sternfamilie regelt. Und nicht zu vergessen, es sind die wenigen massereichen Sterne, die durch heftige Sternwinde und Supernovaexplosionen für Turbulenz im interstellaren Gas sorgen, was u. a. den galaktischen Dynamo in Gang hält.

Sterne entstehen zumeist in „Würfen“. Die Bildung eines Sterns ist also kein isoliertes Ereignis, das unabhängig von der Umgebung wäre. Bislang wissen wir nicht, wovon die Masse eines entstehenden Einzelsterns letztlich abhängt. Ist es die Größe des Gasklumpens, aus dem er durch gravitativen Kollaps hervorgeht, oder ist es eher das Wachstum durch Aufsammeln von Gas aus der Umgebung? Die Theorie der Sternentstehung steckt noch in den Kinderschuhen. Dem Astronomen ergeht es angesichts der Komplexität des Ganzen nicht besser als dem Wirtschaftswissenschaftler! Es wäre schon viel geholfen, verstünde er wenigstens den „Knick“ im Massespektrum bei einer halben Sonnenmasse.

Dass Pareto-Verteilungen überall vorkommen, ist eine Herausforderung an die fächerübergreifende Komplexitätsforschung. Offenbar kommt es gar nicht darauf an, wer mit wem hier in einem komplexen Gewebe interagiert. Eventuell sehen wir den Wald vor lauter Bäumen nicht. Es sei angemerkt, dass es bei der Physik der Gase auch nicht darauf ankommt, den verschlungenen Pfad eines jeden Gasmoleküls zu kennen. Es ist gerade die Unmenge der stoßenden Partikeln, die statistische Gesetzmäßigkeiten hervorbringt, die es an Exaktheit mit „richtigen“ Naturgesetzen aufnehmen.

Das Massespektrum entstehender Sterne ist nur ein Beispiel für eine Pareto-Verteilung in der Astronomie. Wir stoßen auf derartige Verteilungen bei der

Größenverteilung von Mondkratern<sup>6</sup> wie auch bei der Größenverteilung interstellarer Staubteilchen. Sie beschreibt, wie die Häufigkeit von solaren Strahlungsausbrüchen mit zunehmender Stärke abnimmt. Die Häufigkeit hochenergetischer Protonen der kosmischen Strahlung ist ebenfalls pareto-verteilt. Diese Aufzählung ließe sich beliebig erweitern! All diesen Größen gemeinsam ist, dass sie „nach oben offen“ sind. Es ist wie bei der Erdbebenstatistik (oder der Pleiten-Statistik von Banken<sup>7</sup>): Extremereignisse sind zwar selten, aber nicht so selten, wie man es von der Gauss'schen Glockenkurve her gewöhnt ist. Leider hat man uns in der Schule nur von dieser erzählt. Sie beschreibt den „milden“ Zufall, nicht den „wilden“.

---

<sup>6</sup>Der Herschel-Krater auf dem Saturnmond Mimas ist ein Drittel so groß wie Mimas! Man muss sich wundern, dass der Saturnmond diesen Einschlag überstanden hat.

<sup>7</sup>Lesenswert: die populären Schriften des Libanesen Nassim Nicholas Taleb. Man kann als Naturwissenschaftler von einem Banker lernen!