

**Liebe Leserin, lieber Leser,**

noch ist der Winter nicht vorbei, noch nicht die Gelegenheit vertan, der Neujahrsgabe Keplers „Vom sechseckigen Schnee“ zu erwähnen. Der Essay erschien 1611, also vor 400 Jahren, und war dem Freund und Gönner zugeeignet, dem gelehrten Kaiserlichen Rat Johannes Matthäus Wackher von Wackhenfels. Ihre Wirkung reicht bis in unsere Tage. Mathematiker haben immer noch an der sog. „Keplerschen Vermutung“ zu knabbern.

Wir bleiben noch kurz bei der sechsstrahligen Symmetrie. Vor 350 Jahren, am 20. Februar 1661, bestaunten Danziger Bürger, unter ihnen der Astronom Johannes Hevelius, ein Himmelspektakel: sieben Sonnen auf einen Schlag! Von Hevelius ist eine Zeichnung überliefert. Rätselhaft sei der  $90^\circ$ -Bogen, so Haloforscher. Zwei Nebensonnen hat wohl jeder schon gesehen, aber deren sechs . . . Die Haloerscheinung geht auf herabsegelnde *sechseckige* Eisplättchen in der Atmosphäre zurück.

Vor einigen Tagen hat die NASA ein Sonnensegel gesetzt. Es geht darum, den Strahlungsdruck des Sonnenlichts (und die atmosphärische Reibung) für die Raumfahrt zu nutzen. Und wer hatte als erster die Idee dazu? Kepler war aufgefallen, dass Kometenschweife von der Sonne weggerichtet sind. Er brachte dies mit einer „Briese“ in Verbindung, die von der Sonne ausgeht und hatte wohl auch schon, wie man liest, die Vorstellung, mittels Sonnenwindkraft durch den Kosmos zu segeln. Die Existenz des Sonnenwinds war in der Tat vor 60 Jahren von dem Göttinger Astronomen Ludwig Biermann (1907–1986) aufgrund von Kometenschweifbeobachtungen postuliert worden.

Ach ja, sollten Sie sich demnächst wieder einmal am rauschfreien Klang einer CD berauschen, gedenken Sie des Johannes Kepler! Der hat mit seinen Kugelpackungen etwas losgetreten, was in unseren Tagen die kratzende Schallplatte obsolet macht.

Ihr Hans-Erich Fröhlich

## Der Himmel im Februar

Zwei Planeten nehmen ihren Abschied: die Venus am Morgenhimmel und der Jupiter am Abendhimmel. Beide bewegen sich am Himmel auf die Sonne zu, aus unterschiedlichen Richtungen. Kein Wunder, dass sie sich irgendwann begegnen werden, Mitte Mai. Diese Begegnung ist natürlich nur eine scheinbare. Jupiter wird dann viermal weiter von uns entfernt sein als die vergleichsweise nahe Venus.

Im Kommen ist Saturn. Er erobert sich den Nachthimmel, geht am Monatsende bereits gegen 21 Uhr im Westen auf.

## Keplers Vermutung

Keplers Faible fürs Geometrische machte auch vor dem Mikrokosmos nicht halt. Er gilt als der erste Kristallograph. Ausgehend von der sechsstrahligen Symmetrie der Schneeflocke („die vom Himmel fällt und dem Sterne gleicht“) sowie der Tatsache, dass sich um einen Kreis, diesen berührend, genau sechs weitere ohne Spiel überschneidungsfrei gruppieren lassen, kommt Kepler auf das lückenlose Fliesen einer Fläche mit regelmäßigen  $n$ -Ecken, insbesondere Sechsecken zu sprechen, geht dann in die dritte Dimension (Bienenwabe, Granatapfel), um schließlich beim Rhombendodekaeder (Zwölfflächner) zu verweilen, mit dem sich gleich dem Würfel der Raum lückenlos füllen lässt.

Was der Kreis in der Ebene, ist die Kugel im Raum. Fragt man nach der dichtesten Kugelpackung, macht es einen Unterschied, ob man Kuben oder Rhombendodekaeder betrachtet. Ein Würfel (Kubus) verbraucht fast das Doppelte des Volumens der größten einbeschriebenen Kugel, das Rhombendodekaeder nur das 1,35-fache. Kepler ist klar, das muss die dichteste Kugelpackung<sup>1</sup> im Raum sein. Jedenfalls ist das die Vermutung. Sie werden sagen, was soll daran schon sein, das macht doch mein Gemüsehändler, wenn er seine Kohlköpfe auf dem Markte platzsparend zu einer Pyramide stapelt, intuitiv richtig – hexagonal in jeder Ebene und auf Lücke. Jeder Kohlkopf berührt zwölf Nachbarn. Der Raum wird zu 74 % ausgefüllt.

Leider liegen zwischen „Intuition“ und „Beweis“ Welten. Im Falle der Keplerschen Vermutung gingen fast vier Jahrhunderte ins Land, bis der strenge Beweis *so gut wie* erbracht werden konnte – und dies nur dank des Computers.

---

<sup>1</sup>Kepler scheint geahnt zu haben, dass kugelförmige Atome eckige Kristalle bilden.

Noch 1900 landete Keplers Vermutung auf Platz 18b der Hilbertschen Liste ungelöster mathematischer Probleme. Der Göttinger Mathematiker Carl Friedrich Gauß hatte 1831 den Beweis für den Spezialfall der *regulären* Kugelpackung in der Tasche! Doch der zählt nicht! Das Problem: Keplers Rhombendodekaeder ermöglicht zwar ein lückenloses Füllen des Raumes, ist aber immer noch 2% voluminöser als ein „Platonisches“ Dodekaeder bei gleicher Innenkugel. (Von allen Platonischen Körpern kommt der Fünfeckzwölfflächner der Kugel volumenfüllend am nächsten<sup>2</sup>.) Eine dichtere – dann allerdings irreguläre – Packung als die Keplersche ist also nicht von vornherein von der Hand zu weisen. Die Frage, ob nicht doch irgendwie eine Kugel 13 Geschwister berühren kann, hat nach Kepler Isaak Newton beschäftigt. Dessen Fazit: Es geht nicht<sup>3</sup>!

Kepler hat allem Anschein nach Recht behalten – jedenfalls im Falle unendlicher Kugelpackungen –, aber das hatte sowieso niemand ernsthaft bezweifelt gehabt. Packungs- und Kachelungsfragen in  $n$ -dimensionalen Räumen spielen heutzutage in der Physik, aber auch bei der fehlererkennenden und -korrigierenden Hamming-Codierung<sup>4</sup> von Nachrichten eine Rolle. Auch auf acht und 24 Dimensionen trifft die Keplersche Vermutung zu. Falls sich jemand für die Kusszahl im 24-Dimensionalen interessiert: Dort berührt jede „Kugel“ 196 560 Nachbarn, nicht nur ein Dutzend wie im Dreidimensionalen. Man denkt im übrigen bereits über die Kugel und reguläre Anordnungen derselben hinaus. Auf dem Schreibtisch eines Packungs-Professors soll ein Gefäß mit *Smarties* bereitstehen ...

Die Teilung der Fläche in regelmäßige Figuren war bereits vor Kepler ein Thema: bei Dürer und in der maurischen Ornamentik. Aus der Neuzeit bekannt sind M.C. Eschers originelle „Lösungen“ (Quelle: [www.mcescher.com](http://www.mcescher.com)).

---

<sup>2</sup>Mit zusätzlichen Sechsecken geht's noch besser – siehe Fußball

<sup>3</sup>Wie ich las, kann man zwar keine 13. Kugel hinzufügen, es sei aber immerhin so viel Platz, dass zwei beliebige Kugeln ihre Plätze tauschen können, ohne dass auch nur eine der zwölf Nachbarkugeln den Kontakt zur Kugel im Zentrum verliert.

<sup>4</sup>Jedem Byte, bestehend aus acht Bits, kann ein Gitterpunkt in einem abstrakten acht-dimensionalen Raum zugeordnet werden. Außerdem gibt es ein Abstandsmaß: die Anzahl der Buchstabenvertauschungen. Nehmen sie das gewöhnliche Alphabet. Dort ist der Abstand zwischen *Haus* und *Baum* gleich 2, zwei Buchstabenvertauschungen. Der Wortabstand sollte bei einer fehlerresistenten Codierung möglichst groß sein, um die Fehlerrate bei der Speicherung oder Übermittlung niedrig zu halten, auf der anderen Seite soll eine Nachricht möglichst wenig weitschweifig (redundant) sein, um Kanalkapazität zu sparen. Mit einem Wort *kompakt* – ein Packungsproblem also! Dass auf den Raum der 3-Byte-Wörter die Keplersche Vermutung zutrifft, macht sich so ein Nachrichtentechniker zunutze!

Packungsfragen rühren an die Moral. Denken Sie an Zufallspackungen, an Getreidekörner. Selbst das biblische „gerüttelt“ Maß“ bleibt  $1/6$  unter der möglichen Maximaldichte<sup>5</sup>! Das gilt es bei Hohlmaßen zu bedenken!

Wer glaubt, die Keplerschen Spekulationen über die geometrischen Verhältnisse im Großen (damals: Planetensystem) seien *ad acta* gelegt, sei eines besseren belehrt. Die Dodekaeder aus der vierdimensionalen Welt des französischen Kosmologen Luminet haben es 2003 immerhin auf die Titelseite von *Nature* gebracht. Es ging um eine Erklärung des Fehlens großräumiger Korrelationen im Rauschen der Hintergrundstrahlung, was auf einen „kleinen“ Kosmos hinweist. Und hat nicht 1900 der berühmteste deutsche Astronom, Karl Schwarzschild, bereits über ein Spiegelsaal-Universum nachgedacht gehabt? Kepler ist noch lange nicht *out*. Im Gegenteil: topologische Fragen sind im Kommen! Und sie sind durch Messungen im Prinzip entscheidbar!

Es gibt Physiker, die von einer Welt ohne Formeln träumen, oder zumindest davon, dass man eines Tages den Differentialgleichungen ansieht, wie die Lösung qualitativ aussieht, ohne sie ausrechnen zu müssen. Der Platoniker Kepler hatte ja die Lösung des Zweikörperproblems – die Keplerellipse – gefunden gehabt, ohne die Differentialgleichung überhaupt zu kennen!

Vielleicht wundert Sie, dass Mathematiker und Physiker Kugelpackungen in hochdimensionalen Räumen theoretisch untersuchen. Nun, die Dreidimensionalität, sie muss nicht gottgegeben sein. Leute, die sich mit Quantengravitation auskennen, hinterfragen dies schon länger. Ihr Argument: In Raum-Zeiten mit zehn oder gar 26 Dimensionen sei Fundamentalphysik viel leichter konsistent zu formulieren. (Die überzähligen Dimensionen sind heutzutage unserem groben Weltsinn entzogen, sie sind irgendwie „zusammengeschnürt“.) Das ist unbestritten interessant. Trotzdem bleibt zu hoffen, dass sich eines Tages derartige Überlegungen anhand von Messdaten zügeln lassen.

Kaum zu glauben, aber viele Physiker halten das „Nichts“ für den wichtigsten Stoff überhaupt. Der Physiknobelpreisträger von 2004, Frank Wilczek, nennt diesen modernen Äther einfach „den Grid“. (Das passendere Wort, „Matrix“, war leider schon von der Filmindustrie vereinnahmt worden.) Einen Kepler hätten diese neuzeitlichen Spekulationen über den vibrierenden Unterbau des Seins – eine kakophonische Variation der antiken Sphärenmusik? –, das ewig zuckende „Nix“, sicherlich begeistert, konnte er doch als Astronom und Mathematiker, der „nix hat und nix bekommt“ – der Kaiser schuldete ihm das

---

<sup>5</sup>Die Entropie gilt gemeinhin als Maß für die Unordnung. Beim Übergang von einer Zufallspackung zur Kugelpackung trifft das nicht zu. Der Kristall hat die höhere Entropie!

Salär –, kein besseres Neujahrsgeschenk dem Herrn Wackher von Wackhenfels machen als ein Traktat über das „Nix“ (lat. Schneeflocke). Er habe sich bloß mit dem „Nix“ befasst! Geniale Untertreibung oder eine Vorahnung dessen, was die Elementarteilchenphysik mit ihren Beschleunigermaschinen heutzutage so treibt?

In der Kosmologie herrscht die ominöse *Quintessenz*, jene allgegenwärtige Vakuumspannung, deren gravitative Abstoßung das Universum seit einiger Zeit exponentiell explodieren macht. Die Wortwahl hätte treffender nicht sein können. Quintessenz bezeichnet in der Ideenlehre das fünfte Element, womit Plato jenen Satz von vier Urstoffen vervollständigt, auf das jedes Element eine Entsprechung zu einem der fünf möglichen regelmäßigen Vielflächner habe. Das Dodekaeder steht für den Kosmos (gr. das Geordnete), seine zwölf Seitenflächen symbolisieren den Tierkreis.

Kepler hätte sicherlich auch an gewissen Einsichten der neueren Verpackungsmathematik seine helle Freude. (Durchaus praktisch veranlagt, hatte er selbst seinerzeit mit seiner Fassformel einer Angelegenheit des Handels zu einer mathematischen Grundlage verholfen.) Diesmal geht's um *endliche* Kugelpackungen. Kaufe ich Tischtennisbälle, so werden mir die in einer Röhre verpackt angeboten. Das ist angemessen. Die Packungsdichte ist dann maximal. Bei sehr vielen Tennisbällen ist im Dreidimensionalen, wie wir mit 99 % Sicherheit wissen, die Kepler- oder Clusterpackung am günstigsten. Wo aber schlägt die sog. Wurstpackung in die Clusterpackung um? Das nun ist hochinteressant. Bis zu 55 Bällen ist allem Anschein nach die Wurstpackung die günstigste. Niemals kommt die Pizzapackung (alles in einer Ebene) zum Zuge. Entweder ein- oder dreidimensional! Hätten Sie das gedacht? Und in höherdimensionalen Räumen? Wie Mathematiker versichern, ist ab der 42. Dimension immer die Wurstpackung vorzuziehen. Ob diese Überlegungen zur „Wurstkatastrophe“ einmal irgendwelche Auswirkungen zeitigen, steht in den Sternen. Wer weiß das schon?

In seiner Schrift über das Sechseckige erlaubt sich der Autor eine Abschweifung: Er sinniert über Fünzfähigkeit im Pflanzenreich. Kannte er keine Seesterne? Das nun ist bemerkenswert. Die unbelebte Materie verweigert sich nämlich dieser Symmetrie (wie auch der siebenzähligen). Sie ist mit einer *periodischen* Gitterstruktur im Dreidimensionalen nicht vereinbar. Lange schien die fünfzählige Drehsymmetrie niederem Leben vorbehalten. Das hat sich 1974 mit der aperiodischen Penrose-Parkettierung und der Entdeckung der Quasikristalle ein Jahrzehnt später schlagartig geändert.

Zu schade, dass ein Thomas Mann (1875–1955) diese Hinwendung des Anorganischen zum Organischen nicht mehr erlebt hat. Er hätte sich sicherlich in wohlgesetzten Worten auch dazu geäußert. Das Vexatorische in der Natur hatte es ihm stets angetan. Lassen wir ihm, dem Plauderer und „Zauberer“, das letzte Wort<sup>6</sup>:

„Sie [die Schneeflocken] schienen formlose Fetzen, aber er [...] wußte wohl, aus was für zierlichst genauen kleinen Kostbarkeiten sie sich zusammensetzten, Kleinodien, Ordenssternen, Brillantagraffen, wie der getreueste Juwelier sie nicht reicher und minuziöser hätte herstellen können [...] und unter den Myriaden von Zaubersternchen in ihrer untersichtigen, dem Menschenauge nicht zugehenden, heimlichen Kleinpracht war nicht eines dem anderen gleich; eine endlose Erfindungslust in der Abwandlung und allerfeinsten Ausgestaltung eines und immer desselben Grundschemas, des gleichseitiggleichwinkligen Sechsecks, herrscht da; aber in sich selbst war jedes der kalten Erzeugnisse von unbedingtem Ebenmaß und eisiger Regelmäßigkeit, ja, dies war das Unheimliche, Widerorganische und Lebensfeindliche daran: sie waren zu regelmäßig, die zum Leben geordnete Substanz war es niemals in diesem Grade, dem Leben schauderte vor der genauen Richtigkeit, es empfand sie als tödlich, als das Geheimnis des Todes selbst, [...]“

Das Wort „Kristall“ soll von „Kryos“ (gr. Kälte, Frost) herrühren.

---

<sup>6</sup>Zauberberg: „Schnee“