Die Geschichte lehrt die Menschen, dass die Geschichte die Menschen nichts lehrt.

Mahatma Gandhi (1869–1948)

Liebe Leserin, lieber Leser,

Astronomie ist nicht alles, aber vieles hat seine Wurzeln in der Astronomie. Dass man anhand von Fallzahlen einer Doppelblindstudie die Wirksamkeit eines Impfstoffes gegen COVID-19 schätzen kann, geht zurück auf einen Astronomen! Die Rede ist von Pierre Simon Marquis de Laplace (1749–1827). Lassen Sie uns also zur Abwechslung einmal über Corona reden. Mit hörbarer Erleichterung wurde aufgenommen, Impfstoffe mit hoher Wirksamkeit gegen das Coronavirus seien gefunden worden. In einem Fall war von 94,5 % die Rede. Fünf Coronafällen unter den Geimpften stünden 90 Fälle in der Placebogruppe gegenüber. Die Schätzung der Wirksamkeit scheint einfach: Dank des Impfstoffes sind der Gruppe der Geimpften 85 Coronafälle erspart geblieben, macht eine Wirksamkeit von $85/90 = 94{,}4\,\%$. Doch wie belastbar sind solche Angaben? Versucht man, dies herauszufinden, stößt man auf ein für die Wissenschaft fundamentales Problem: einem unvermeidlichen Rest an S u b j e k t i v i t ä t . Nach des Kosmos-Boten M e i n u n g übertrifft mit 90-prozentiger Wahrscheinlichkeit die Wirksamkeit 90,2 %. Verlangte einem nach 99-prozentiger Sicherheit, läge die untere Grenze bei „nur“ 85,7 %. (Von einer derart hohen Wirksamkeit[1] hätte man Monate zuvor nicht zu träumen gewagt!) Bei der Zulassung eines Impfstoffs oder Medikaments zählt selbstredend die Meinung der Zulassungsstelle, nicht die der Firma oder gar des Kosmos-Boten. Der Tatsache, dass bei gegebener Faktenlage unterschiedliche Interpretationen möglich sind, geht dieser Newsletter nach. Natürlich kommt auch Pierre Simon de Laplace zu Wort. Der Marquis wollte wissen, wie wahrscheinlich es sei, dass tags darauf wieder die Sonne über Frankreich aufgeht – eingedenk der vielen „erfolgreichen“ Sonnenaufgänge zuvor.

Die Namen der ersten vier Planetoiden und die ihrer Entdecker dürften vielen Lesern noch geläufig sein. Nummer vier, Vesta, wurde 1807 aufgefunden.

[1] Effiziens ist beileibe nicht alles, aber das, worum es hier ausschließlich gehen soll.

Doch wie heißt der fünfte Planetoid? Es sollte 38 Jahre dauern, bevor der Kleinplanet (5) Astrea von dem Postbeamten und Liebhaberastronomen Karl Ludwig Hencke (1793–1866) aufgefunden wurde. Das war vor 175 Jahren, genauer, am 8. Dezember 1845. Danach ging es Schlag auf Schlag, als sei der Bann gebrochen. Bereits im Juli 1847 folgte (6) Hebe. Wieder war Karl Ludwig Hencke der glückliche Finder.

Der Name Astrea war glücklich gewählt, ein Omen. Einer antiken Verheißung zufolge kündigt die Rückkehr der „Redlichkeit“ den Wiederbeginn des „Goldenen Zeitalters“ an! Ja, die alten Griechen dachten zyklisch, und das, obwohl sie nicht viel vom Menschengeschlecht hielten und ihm den stufenweisen Niedergang attestierten. Als im Eisernen Zeitalter den Göttern die allgemeine Verderbtheit schließlich zu bunt wurde, machte sich als letzte Schutzgöttin der Sterblichen auch die Jungfrau Asträa aus dem Staube. Am Himmel, als Sternbild Virgo, neben der Waage der Gerechtigkeit, hielt sie die Erinnerung an bessere Zeiten wach. Als in Rom, unter Kaiser Augustus (63 v. Chr.–14 n. Chr.), eine Periode des Friedens und Gedeihens einsetzte, glaubte man, nun sei es endlich so weit. Es geschah aber in der Provinz, in Bethlehem, wo sich die Schrift erfüllte: Die „Niederkunft“ Mariä, der Jungfrau, läutete das Christliche Zeitalter ein.

Für die Astronomie brach mit der Astrea in der Tat ein goldenes Zeitalter an: Heute kennt man von 750 000 Kleinplaneten die Bahnen.

Einen coronafreien Start ins zweite Fünftel des 21. Jahrhunderts – es beginnt am Silvesterabend um 20:12 MEZ – wünscht Ihnen

Ihr Hans-Erich Fröhlich

Der Himmel im Dezember

Venus ist weiterhin des Morgens sichtbar. Allerdings nähert sie sich der Sonne und verliert zunehmend an Bedeutung.

Mars verliert auch. Er büßt im Laufe des Dezember um fast eine Größenklasse an Helligkeit ein. Am Jahresende geht er bereits gegen 2 Uhr morgens unter.

Jupiter und Saturn veranstalten eine sog. „große Konjunktion“. Am 21. Dezember zieht der schnellere Jupiter am Saturn vorüber. Beide kommen einander auf sechs Bogensekunden nahe! Das ist ein seltener Anblick, den man sich nicht entgehen lassen sollte. Erst 2080 findet eine ähnlich enge Begegnung statt. Am besten, man schaut schon die Tage zuvor auf die beiden. Übrigens: Am 17. gesellt sich der junge Mond hinzu. Mit dieser überaus engen Konjunktion verabschieden sich die beiden Riesenplaneten vom Abendhimmel. Beide bereiten sich auf die Konjunktion mit der Sonne Ende Januar 2021 vor. Am Jahresende verschwinden sie bereits kurz nach 18 Uhr.

Treffen der beiden Großplaneten Jupiter und Saturn finden aller zwanzig Jahre statt. Das ergibt sich aus deren Umlaufzeiten um die Sonne, 11,86 und 29,46 Jahre: 1/11,86 - 1/29,46 = 1/19,85. Die wohl bekannteste Begegnung ereignete sich im Jahr 7 v. Chr. Damals näherten sich Jupiter und Saturn dreimal binnen weniger Monate einander. Dazu müssen beide Planeten fast am gleichen Tag in Opposition stehen. Dieses Himmelsereignis war den drei Magiern aus dem Morgenlande nicht verborgen geblieben. Sie folgten dem „Stern von Bethlehem“, womit die Weihnachtsgeschichte ihren vermutlich astronomischen Anfang nahm.

Der Tiefpunkt des Sonnenjahres fällt auf den 21. Dezember. Um 11:02 Uhr MEZ steht die Sonne senkrecht über dem südlichen Wendekreis (des Steinbockes). Ihre Mittagshöhe ist um 23 1/2 Grad niedriger als zur Zeit der Tag-und-Nacht-Gleiche. Die gesamte nördliche Polarkalotte liegt im Dunkeln. Wir erfreuen uns des astronomischen Winteranfangs, weil es danach wieder bergauf geht mit dem Mittagssonnenstand.

Lernen ist „Updaten“ von Wissen

Kommen wir zurück auf das 90:5-Beispiel aus der Pharmaindustrie und die Ermittlung der Impfstoffwirksamkeit. Gesetzt, letztere sei bekannt, ist es ein Leichtes, die Wahrscheinlichkeit auszurechnen, dass bei insgesamt 95 Coronafällen, genau fünf auf die Gruppe der Geimpften entfallen. Das regelt die sog. Binomialverteilung und ist Stoff aus dem Mathematikunterricht. Die Umkehrung, das Schließen auf die Wirksamkeit, anhand registrierter Fallzahlen, ist hingegen ohne Zusatzannahmen nicht machbar.

Was machbar ist: Man tue so als kenne man die Wirksamkeit und berechne sich über die Binomialverteilung[2] die Wahrscheinlichkeit der beobachten Fallzahlen! Dreht man nun gedanklich an der Wirksamkeit, scannt man deren Wahrscheinlichkeitsverteilung. Ganz nach Gusto sucht man sich nun den Wert für die Impfwirksamkeit heraus, wo die Wahrscheinlichkeit maximal ist, den Mittelwert oder – um auf Nummer Sicher zu gehen – jene Werte, wie in der Anmoderation geschehen, die mit 90- bzw. 99-prozentiger Wahrscheinlichkeit überschritten werden.

Doch halt! Wir haben unbedacht unterstellt, alle denkbaren Werte einer gesuchten Größe X (hier der Impfeffiziens) seien *a priori* gleich wahrscheinlich.

[2] Bei einer Wirksamkeit η beträgt die Wahrscheinlichkeit p, dass das Virus in der Placebogruppe zuschlägt, $p = 1/(2-\eta)$, falls die Hälfte der Probanden dieser Gruppe angehören. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei insgesamt $n = 95$ Erkrankungen $k = 90$ auf die Placebogruppe entfallen, berechnet sich nach der Formel $W = \frac{n!}{k!(n-k)!}\, p^k (1-p)^{n-k}$.

Das war voreilig. Man stelle sich vor: Das gleiche Datenmaterial diene zur Bestimmung von Y, einer anderen Größe, welche aber eine Funktion von X ist, wie X^2 oder $\log(X)$. Sind nun die X-Werte *a priori* gleichverteilt, wären es die Y-Werte nicht und umgekehrt.

Da man nicht zwangsläufig von Gleichverteilung ausgehen kann, kommt man nicht umhin, sich eine plausible Startverteilung vorzugeben. Das ist die berühmte Prior-Verteilung, kurz der „Prior". Aus dieser Verteilung wird nach erfolgter Beobachtung oder Messung die sog. Posterior-Verteilung. Kommen neue Daten hinzu, wird der Posterior zum neuen Prior. Lernen aus Erfahrung ist nichts anderes als die Revision einer Verteilungsfunktion im Lichte neuer Daten! Die Crux: Man kann nur etwas bereits Vorhandenes revidieren. Als „Keimwissen" steht am Anfang stets eine V e r m u t u n g ! Die Zulassungsstelle für Impfstoffe weiß das und hat ein Auge darauf bzw. gibt den Prior vor.

An der Berechnung des Posteriors ist nichts auszusetzen. Es ist der Prior, der die Gemüter erregt, zumal, wenn bei schwächelnder Evidenz (nichtssagenden Daten) der Posterior stark von jenem abhängt. Objektivitätsgläubige Wissenschaftler halten das Einbeziehen von „Vorwissen" – bevor die Messdaten eintrudeln – schlicht für unwissenschaftlich[3].

Zum Glück für die Wissenschaft verliert die genaue Gestalt der Priorverteilung bei guter Datenlage – im Falle der Impfwirksamkeit wäre das eine möglichst hohe Anzahl an Infizierten – schnell an Bedeutung. Ganz allgemein gilt: Taugen die Daten nichts, bestätigt das das Vorurteil. Sind sie überzeugend, setzt sich die Wahrheit durch – ggf. gegen das Vorurteil!

Bei 95 Infizierten, wie in der eingangs erwähnten Studie, kann man schon recht gut die Impfwirksamkeit s c h ä t z e n . Der Kosmos-Bote bevorzugt den sog. Jeffreys-Prior. Der ist zwar in diesem Fall „firmenfreundlich", d. h. gibt einer hohen Impfstoffwirksamkeit Vorrang, aber dies zu einem Preis: Die a-priori Wahrscheinlichkeit, dass der Impfstoff kontraproduktiv sein könnte, d. h., eine COVID-19-Erkrankung befördert, beträgt 50 %.

Sir Harold Jeffreys (1891–1989) war unter anderem auch Astronom. Ihm lag sehr daran, die unselige Prior-Verteilung, an der sich seine Kollegen stießen, zu „objektivieren". 1946 hatte er eine Idee: eine Vorschrift, wie man einen Prior zu konstruieren habe. Worum es ihm ging, verdeutliche ein Beispiel: Sonnenähnliche Sterne zittern unter dem Poltern der Konvektion

[3] Nicht die Gültigkeit des Bayes'schen Theorems (s. u.) wird bezweifelt, sondern lediglich seine Anwendbarkeit. Es gibt respektable Leute, die mit einer Aussage, wie „die Regenwahrscheinlichkeit beträgt 80 %", partout nichts anzufangen wissen.

äußerlich wie ein Wackelpudding. Bekannt sind die Fünf-Minuten-Oszillationen der Sonne. Sternoszillationen verraten viel über das Innere von Sternen. Doch zur Sache! Statt von einer fünfminütigen P e r i o d e könnte man genauso gut von einer F r e q u e n z von 3 1/3 mHz (Milli-Herz) sprechen. Ein beobachtender Astronom ist nun versucht, aus den verrauschten Daten die Periode b e s t m ö g l i c h zu ermitteln, einem mehr theoretisch ausgerichteten Astronomen ist eher an der b e s t m ö g l i c h e n Bestimmung der Frequenz gelegen, dem Kehrwert der Periode. (Die verschiedenen Vorlieben sind der Geschichte geschuldet.) Wären die Messungen rauschfrei, wären diese Vorlieben egal. Beide kämen zum gleichen Ergebnis, d. h., der Kehrwert der ermittelten Frequenz entspräche der ermittelten Periode. Im Falle von verrauschen Daten, dem Normalfall, sorgt erst Jeffreys Prior dafür, dass beide Astronomen zum gleichen Ergebnis[4] gelangen! Die Prior-Verteilung ist so konstruiert, dass es gleichgültig ist, ob man sich für die Periode oder die Frequenz (oder irgendeine Funktion davon) interessiert. Die resultierenden Posterior-Verteilungsfunktionen sind ineinander umrechenbar. Das ist eine recht angenehme Eigenschaft von Jeffreys' Prior – mehr aber auch nicht.

„Immer wieder geht die Sonne auf"

Die geschilderte Art[5] des Rückwärtsschließens – im konkreten Beispiel von den Fallzahlen auf die Wirksamkeit des Impfstoffes – geht zurück auf Thomas Bayes (1702–1761), einen englischen Geistlichen. Das sog. Bayes'sche Theorem[6] der Wahrscheinlichkeitsrechnung fand man nach seinem Tode. Ein Freund legte es der Royal Society vor, wo es dann lag. Populär gemacht hat das Bayes'sche Schlussfolgern der Astronom, Mathematiker und Staatsmann Pierre Simon Marquis de Laplace (1749–1827). Das ist gut 200 Jahre her. Heutzutage macht das Bayes'sche Theorem den „Kern" der wissenschaftlichen[7] Logik aus: Das Updaten von Erkenntnissen angesichts neuer Daten. Schnelle Computer machen es möglich. Deshalb die Renaissance nach 200 Jahren! Das einzige Problem ist der Prior: Wie formuliert man mathematisch korrekt Unvoreingenommenheit?

Wie der Kosmos-Bote gelernt hat, sollte man nie etwas 100-prozentig ausschließen, auch

[4] Man schätzt den Logarithmus der Periode, $\log(P)$, bzw. der Frequenz, $\log(\nu)$, nicht P bzw. ν selbst. Es wird ausgenutzt, dass $\log(P) = |\log(\nu)|$ ist.

[5] Es ist wirklich eine Kunst!

[6] In verkürzter Fassung lautet es: Die Posterior-Wahrscheinlich dafür, dass die Impfwirksamkeit soundso viel Prozent beträgt, ist proportional dem Produkt zweier Wahrscheinlichkeiten: der Prior-Wahrscheinlichkeit für die Impfwirksamkeit und der Wahrscheinlichkeit (*Likelihood*) dafür, dass bei gegebener Wirksamkeit die beobachteten Fallzahlen eintreffen.

[7] Nicht nur Wissenschaftler, auch Kriminalbeamte sind Bayesianer! Die NSA suchte 1957 händeringend Mathematiker, die sich in Bayes'scher Statistik auskennen.

Astrologie nicht. Ist etwas dran, hätte eine Pseudowissenschaft dann immerhin eine Chance, sich durchzusetzen. Zwischen 99,999 % und 100 % besteht ein Unterschied! 100 % Ablehnung *a priori* käme einem Verbot gleich.

Bayes'sches Schlussfolgern kommt aus der Astronomie des frühen 19. Jh. Die Pharmabranche hat es sich erst unlängst zu eigen gemacht, weil sich dadurch bei Medikamentenstudien unnötiges Leid bei Probanden und Versuchstieren vermeiden lässt. Bayes'sche Verfahren sind flexibel! Studien müssen nicht mehr bis zum bitteren Ende durchgezogen werden.

Pierre Simon Laplace sah darin eine Möglichkeit, einen Blick auf die Zukunft zu erhaschen. Er hatte 1812 ein epochales Werk über Wahrscheinlichkeitstheorie publiziert und fragte sich, wie wahrscheinlich es ist, dass am nächsten Morgen wieder die Sonne aufgeht, wenn sie dies bereits zigmal getan hat.

Das Sonnenaufgangsproblem hat dem Ansehen von Laplace geschadet. Er wurde deswegen belächelt. Als exzellenter Himmelsmechaniker hätte er sehen müssen, dass ein Beispiel aus dieser Sparte am wenigsten geeignet ist, die Bayes'sche Vorhersagekraft zu illustrieren. Das folgende trifft ohnehin eher auf ein mathematisch talentiertes Kleinkind zu, das zum ersten Male die Nacht erlebt und sich fragt, ob die Sonne wohl jemals wieder zum Vorschein kommt, als auf einen Erwachsenen, der das zum soundsovielten Male bereits erlebt hat und als aufgeklärter Zeitgenosse über die Hintergründe Bescheid weiß.

Der Marquis ging naiverweise von einer „flachen" Prior-Verteilung für die Sonnenaufgangswahrscheinlichkeit aus: Alle Werte zwischen Null und Eins seien gleichwahrscheinlich. Diese Idee, keine gute, hatte er wohl von Hochwürden Bayes übernommen. Wie also wandelt sich der Erwartungswert der Sonnenaufgangswahrscheinlichkeit mit der Erfahrung? Nach einem erfolgreichen Sonnenaufgang springt dieser Wert von postulierten 50 % auf 66 2/3 %, nach einem weiteren auf 75 %, dann auf 80 %, 83 1/3 %, usf. Das Vertrauen darauf, dass die Sonne weiterhin aufgehen wird, wächst von Tag zu Tag. Es gilt die Laplace'sche Sukzessionsregel von 1774: Nach k Erfolgen bei n Versuchen ist die künftige Erfolgswahrscheinlichkeit $\frac{k+1}{n+2}$ (und nicht $\frac{k}{n}$). Solange noch kein Sonnenaufgang ausgefallen ist, also $k = n$ ist, ergibt sich für den Erwartungswert der Sonnenaufgangswahrscheinlichkeit $\frac{n+1}{n+2}$, die obige Reihe. Nach 365 erfolgten Sonnenaufgängen bei 365 möglichen kann man sich demnach zu 90 % sicher sein, dass mit über 99,4 % Wahrscheinlichkeit die Sonne fürderhin aufgehen wird. Wem nach 99-prozentiger Sicherheit verlangte, muss sich nach einem Sonnenjahr erfolgreicher Aufgänge mit nur 98,8 % Minimalwahrscheinlichkeit begnügen. Laplace, der von einem Weltalter von 5000 Jahren ausging, konnte 1,8 Millionen : 1 wetten, dass die Sonne auch am nächsten Morgen, wie gewohnt, aufgehen wird.

Natürlich stimmt die Laplace'sche Sukzessionsregel, bloß ihre Voraussetzung trifft nicht zu. In keinster Weise spiegelt der Prior das astronomische Wissen über das Sonne-Erde-System wider. Der große Himmelsmechaniker stellte sich wissentlich dumm.

Laplace' Prior ist nicht unvoreingenommen: Er berücksichtigt nicht, dass eventuell niemals ein Sonnenaufgang ausfällt. Laplace' Nachfahren aus dem 20. Jh. priorisieren daher einen anderen Prior. Sie wechseln von der Sonnenaufgangswahrscheinlichkeit p zum Erfolgs-Mißerfolgs-Verhältnis $X = \frac{p}{1-p}$ und rechnen mit einer konstanten Prior-Wahrscheinlichkeit für $\log(X)$, anstatt für p selbst, wie bei Laplace. Ahnungslosigkeit hinsichtlich des Ausgangs des Sonnenaufgangsexperiments heißt nun, dass beispielsweise $X = 0,01$ *a priori* genauso wahrscheinlich ist wie $X = 1$ oder $X = 100$. Damit errechnet sich der Erwartungswert zu $\frac{k}{n}$, sofern $k \neq n$. Das, und nicht das Laplace'sche $\frac{k+1}{n+2}$, hatte man intuitiv ohnehin erwartet. Leider hat der Prior von Edwin Thompson Jaynes (1922–1998) seine Tücken. Er ist nicht normierbar und erfordert mathematische Klimmzüge für den Fall $k = n$.

Doch lehrreich sind letztlich nur Vorhersagen, die nicht eintreffen. Und damit zurück zur Gegenwart. Wir erleben zur Zeit hautnah, wohin der „Erfahrungsaberglaube“ (Robert Musil) führt. Aus der Tatsache, dass es lange gut gegangen ist, folgt eben nicht, dass das so bleibt. Die Induktion, das Schließen vom Speziellen, einer endlichen Anzahl von Beobachtungen, auf das Allgemeine, sie hilft, so Bertrand Russell (1872–1970), höchstens beim Raten. Der Risikoforscher und Essayist Nassim Nicholas Taleb (geb. 1960) empfiehlt, sich nicht auf das Niveau eines Truthahns hinab zu begeben, der aus der Tatsache, dass man es offenbar gut mit ihm meint – er bekommt sein täglich Futter – fälschlich schließt, es gehe ewig so weiter. Von Thanksgiving war in seiner Gegenwart nie die Rede.