

Die Materie sagt der Raum-Zeit, wie sie sich krümmen muss; die Raum-Zeit sagt der Materie, wie sie sich bewegen muss.

John Wheeler (1911–2008)

Liebe Leserin, lieber Leser,

der Dezember ist reich an Jahrestagen. (a) Vor 444 Jahren, am 27. Dezember 1571 wurde in Weil der Stadt Johannes Kepler (gest. 1630) geboren. (b) Vor 150 Jahren entdeckten Wilhelm Tempel (1821–1889) und Horace Parnell Tuttle (1837–1923) den Kometen 55P/Tempel-Tuttle und erkannten seine Periodizität. Er gelangt aller 33 Jahre in Sonnennähe und löst sich von Mal zu Mal mehr in Wohlgefallen auf, was uns alljährlich im November die Leoniden beschert. (c) Vor 100 Jahren schließlich offenbarte ein Spektrum, aufgenommen von Walter Sydney Adams (1876–1956), dass es sich beim Siriusbegleiter, Sirius B, um einen Winzling von Erdgröße aber Sonnenmasse handeln muss. Nach 1922 nannte man so etwas einen Weißen Zwerg. 1925 gelang es Adams, die von Einstein vorhergesagte Gravitationsrotverschiebung erstmals bei einem Stern zu messen – Sirius B.

Willkommen beim zweiten Teil des relativistischen Spaziergangs! Der Kosmos-Bote wurde durch seine Recherchen selbst überrascht: Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie (ART) lässt sich (fast) ohne Mathematik verbal exakt in Worte fassen – was nichts nützt, weil die zugehörige Mathematik kaum in Worte zu fassen ist!

Frohe Festtage und einen guten Jahresausklang wünscht

Hans-Erich Fröhlich

Der Himmel im Dezember

Merkur zeigt sich inzwischen östlich der Sonne und wird Ende des Jahres am Abendhimmel sichtbar. Mit fast 20° erreicht er am 29. Dezember seinen größten östlichen Winkelabstand zur Sonne.

Venus ist Morgenstern. Am 7. Dezember gesellt sich der abnehmende Mond ihr zu. Mars und Jupiter sind mit von der morgentlichen Partie.

Mars steht gegen Jahresende bereits kurz nach 2 Uhr auf, Jupiter bereits drei Stunden vor ihm. Saturn ist unsichtbar.

Am 22. Dezember um 5 Uhr 48 MEZ ist astronomischer Winterbeginn. Der Nordpol hat sich dann maximal von der Sonne abgewendet. Danach wendet er sich ihr wieder zu, d. h., die Tage werden wieder länger, hierzulande.

Allgemeine Relativitätstheorie

Das folgende ist der Versuch eines „Nicht-Relativisten“, etwas von der Faszination, die von Einsteins Denken ausgeht, auch demjenigen zu vermitteln, der bislang mit Relativität nichts am Hut hatte. Leute, die mehr davon verstehen, seien bitte nachsichtig mit ihrem Urteil! Man beachte weiterhin, dass ein zeitlicher Abstand durch Multiplikation mit der Lichtgeschwindigkeit c als Zeit, „strecke“ ausgedrückt wird. Eine Sekunde s i n d 300 Millionen Meter!

Zusammenfassung: spezielles Relativitätsprinzip

Bisher war von einer Minderheit *s p e z i e l l e r* Beobachtungsplattformen die Rede, solchen, wo die Gesetze der Physik besonders einfach aussehen. Sie sind physikalisch alle gleichwertig und heißen *I n e r t i a l s y s t e m e*. Ob ich im Weltenraum „stehe“ oder mich gleichförmig-geradlinig bewege, macht keinen Unterschied: Geschwindigkeit ist relativ, Beschleunigung absolut! Eines der Naturgesetze, welches besonders einfach ist, lautet: Die Lichtgeschwindigkeit c ist (unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle) stets dieselbe! Einstein änderte die Gesetze der Mechanik, auf dass sie *f o r m a l* verträglich mit denen der Optik würden, wo Lichtgeschwindigkeit das Normalste von der Welt ist. Die Optik siegte über die Mechanik. Auf der Strecke blieb das Gesetz von der Addition der Geschwindigkeiten.

Raum und Zeit, von Newton noch als gegeben hingenommen und als reine „Anschauungsformen“ (Kant) getrennt betrachtet, verschmelzen zur Raum-Zeit. Was *r ä u m l i c h* und was *z e i t l i c h*, das ist Ansichtssache und hängt vom Bewegungszustand des Betrachters ab. Keine Ansichtssache ist der Abstand zweier Ereignisse im vierdimensionalen Minkowski-Raum. Dieser Raum ist flach, und für das Abstandsquadrat gilt ein seltsamer „Pythagoras“: Er ist das Quadrat des zeitlichen Abstands, *v e r m i n d e r t* um das Quadrat des

räumlichen. Die Quadratwurzel daraus, der relativistische Abstand, ist absolut. Wen wundert's, kontrahiert die Länge und dilatiert die Zeitdauer beim Wechsel des Bezugs? Daran ist nichts auszusetzen.

Allgemeines Relativitätsprinzip

Einsteins Spezielle Relativitätstheorie (SRT) von 1905 war Anfang und Auftrag: Die Gesetze der Physik sollten womöglich unabhängig vom benutzten Bezugssystem formulierbar sein. Einstein gelang es 1915, das Relativitätsprinzip, das Prinzip von der Gleichwertigkeit der Bezugssysteme, auf Nicht-Inertialsysteme auszudehnen, zu verallgemeinern. Beschleunigung ist nun ebenfalls relativ! An der SRT ändert dies nichts. Sie gilt weiterhin uneingeschränkt. Das Revolutionäre daran: Durch diesen Coup wurde die Schwerkraft eingebunden. Die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) ersetzt fortan die Newtonsche Theorie der Schwere, also das $1/r^2$ -Gesetz. Ein Bezugssystem, das Furore machte, ist Einsteins „fallender Fahrstuhl“. Ein Gedankenexperiment wies den Weg! Schwerkraft kann (lokal) als Scheinkraft abgetan werden! Vergleichbar der Fliehkraft auf einem Kettenkarussell ist sie Folge einer „unglücklichen“ Wahl. In einem natürlicheren Bezugssystem, dem „fallenden Fahrstuhl“, verschwände sie.

Hier ist es, Einsteins Schlüsselerlebnis: Angenommen, Sie sind im Fahrstuhl. Solange dieser steht, spüren Sie Ihr Gewicht, die Erdschwere. Nun reißt das Seil, was Schwerelosigkeit erlebbar macht. Abgeschottet von der Außenwelt, können Sie nicht wissen, treiben Sie unbeschleunigt geradewegs zwischen den Sternen oder fallen Sie beschleunigt, gar in ein schwarzes Loch? Dem ISS-Astronauten ist dieses Gefühl vertraut. Bei geschlossenem Fenster verrät nichts, dass er sich im Kreise bewegt. Beim Start zur ISS hatte er das Gefühl einer vermehrten Schwere. Hätte er nicht gewusst, dass er sich in einer Rakete befindet, die mit $2,5 g$ immer schneller wurde, hätte er sich genau so gut auf dem Jupiter „in Ruhe“ wähen können.

Man nennt diese Ununterscheidbarkeit von Beschleunigung und Schwerkraft Äquivalenzprinzip. Es ist der Fels, auf dem Einsteins Gravitationstheorie ruht. Galilei und seine Nachfolger wunderte, dass ein Goldklumpen und ein Federkiel (im Vakuum) gleich schnell fallen. Einstein wundert sich nicht, er fordert! Und er geht einen Schritt weiter. Sein Physikerinstinkt sagt ihm, das Prinzip muss generell gelten, nicht nur in der Mechanik. Er nimmt die Optik, also die Elektrodynamik, mit ins Boot und spekuliert folgenreich

über Lichtablenkung, Gravitationsrotverschiebung etc. Und er behielt recht. Woher ein Schweregefühl rührt, von der Gravitation oder von einer beschleunigten Bewegung, ist experimentell nicht zu entscheiden. Ist etwas ununterscheidbar, dann ist es dasselbe! Es macht wenig Sinn, von einem Schwerfeld zu reden, kann man es wegzaubern. Wichtig: Im freien Fall ist „die Physik“ einfacher – es gilt wie in einem Inertialsystem die SRT! „Echt“ ist nur, was man nicht durch ein speziell gewähltes Bezugssystem ausschalten kann. Das herauszufinden hat Einstein zehn Jahre gekostet.

Ihre Fahrstuhlkabine darf nicht zu groß sein, sonst könnten Sie beim Absturz feststellen, dass sich zwei in gleicher Höhe schwebende Äpfel mysteriös aufeinander zubewegen. Dass sie just die Seiten wechseln, wenn nicht gar zusammenstoßen, passiert der Fahrstuhl den Erdmittelpunkt, können Sie nicht wissen. Sie ziehen vielmehr den Schluss: Parallelen schneiden sich! Ein Schwerfeld lässt sich nicht wirklich, d. h. global, loswerden, es sei denn, es wäre homogen. Gezeitenkräfte wie Ebbe und Flut bleiben!

Doch zurück zu den Einsteinschen „Experimenten“! Dass in einer Rakete mit tätigem Triebwerk alle unbefestigten Gegenstände gleich schnell nach hinten fallen (dorthin, wo sich das Triebwerk befindet), ist klar. Was aber hat diese Situation mit derjenigen des Jesuitenpaters und Astronomen Giovanni Battista Riccioli (1598–1671) zu tun, der zwar nicht am schiefen Turm von Pisa, dafür aber am Asinelliturm von Bologna durch Fallenlassen von Gegenständen als erster die Fallbeschleunigung g maß?

Vielleicht hilft die Erzählung vom verwirrten Weltraumfahrer weiter: Dieser wähnt sich in seiner Rakete weitab von irgendwelchen Masseansammlungen im Universum. Er tritt aufs Gaspedal. Die Beschleunigung, $1 g (= 9,8 \text{ m/s}^2)$, bemisst er so, dass sie für eine angenehme „künstliche“ Schwere sorgt. Der gute Mann fühlt sich wie zuhause. Alles bestätigt ihn in seiner Meinung: Treibstoff wird verbraucht. Die Uhr an der Raketenspitze tickt etwas geschwinder als die an der Düse achtern – wie von Einstein behauptet. Und dennoch, alles ist anders: Er ist zuhause! Seine Rakete schwebt ein paar Meter überm Erdboden und gewinnt trotz Beschleunigung ($1 g!$) keinen Meter an Höhe!

Es ist das **V e r h i n d e r n** des freien Falls, welches für Schwere sorgt und keine mysteriöse Anziehung à la Newton. Stellen Sie die Rakete des verwirrten Weltraumfahrers auf ein Podest, und es ändert sich nichts (außer, dass das Verschwenden von Treibstoff ein Ende hat)!

Der Vergleich mit der Fliehkraft ist aufschlussreich. Beim sich drehenden

Kettenkarussell ist es die Kette, die den Fahrgast daran hindert, sich vom Karussell geraden Weges und mit konstanter Geschwindigkeit zu entfernen. Scheinkräfte (Schwerkraft, Fliehkraft, ...) entstehen immer dann, wird der natürliche Gang der Dinge – die Bewegung auf der Trägheitsbahn – durch äußere Zwänge unterbunden.

Einsteins Sicht auf die Welt der Dinge hat ihren Preis:

- Sie besticht zwar durch „Eleganz“, die zugehörige Mathematik aber ist reichlich vertrackt. Reichte zur Beschreibung der Newtonschen Schwere die Angabe eines einzigen Zahlenwertes pro Raumpunkt aus – des Gravitationspotentials –, sind es nunmehr deren zehn! Hätte man sich denken können: Newtons $1/r^2$ -Gesetz ähnelt sehr Coulombs (1736–1806) $1/r^2$ -Gesetz der Elektrostatik. Bei bewegten Ladungen gesellt sich zum elektrischen Feld ein magnetisches. Der Newtonschen Schwere fehlte dieses „magnetische“ Pendant. Dass das Gravitationsfeld strömender Masse bzw. Energie „magnetähnliche“ Auswirkung zeitigt, muss gesehen nicht wundern. Ein Gravito-magnetischer Mitnahmeeffekt¹ durch die Rotation der Erde ist inzwischen nachgewiesen²!
- Die Schwerkraft wird zu einer geometrischen Eigenschaft der Raum-Zeit degradiert, sprich in den „Hintergrund“ der Welt verbannt. Sie nimmt damit eine Sonderstellung ein – was die Physik bis heute spaltet! Alle anderen Naturkräfte widersetzten sich der „Geometrisierung“.
- Einstein selbst schreckte vor einer Konsequenz seiner ART zurück, der Möglichkeit von „Dunkelsternen“, heutzutage besser bekannt als schwarze Löcher.

Was Einstein u. a. zu schaffen machte war die Forderung, eine Theorie solle nur messbare Größen enthalten, keine verborgenen Parameter.

Newtons Gesetz der Schwere bloß SRT-gerecht umzuformulieren, so dass es bei einer Lorentztransformation seine Form nicht änderte, reicht nicht. Die Raum-Zeit bliebe flach (d. h. es gilt der Satz des Pythagoras in seiner abgewandelten Form) und die in die Theorie eingehenden Raum- und Zeitkoordinaten unbestimmbar. Man ist nämlich zum Messen von Gestirnspositionen auf das Licht angewiesen, und das bereitet sich bei Anwesenheit von Materie

¹Bitte nicht verwechseln mit magneto-gravitativen Effekten in der Plasmaphysik!

²Das war u. a. Aufgabe der Satellitenmission Gravity Probe B

(Stoff und Energie) nun einmal nicht geradlinig³ aus. Der Wechsel von der flachen Minkowskischen Raum-Zeit zur gekrümmten Riemannschen war unumgänglich. Diese ist gehaltvoller als jene. Deshalb die zehn Zahlenwerte⁴ pro Raum-Zeit-Punkt. Die Metrik der Riemannsche Raum-Zeit wird durch das (tensorielle) Gravitationsfeld g_{ij} beschrieben. Sie lesen richtig, Gravitation wird mit Geometrie gleichgesetzt! Die Minkowski-Raum-Zeit, eine pseudo-euklidische Mannigfaltigkeit, ist nicht mehr als eine brauchbare Näherung! Sie gilt nicht in der Nähe von Neutronensternen oder gar schwarzen Löchern.

1915 legte Einstein seine Gravitationstheorie vor: Die ART läuft bei schwachen Feldern und langsamen Bewegungen ($\ll c$) auf die Newtonsche Formel hinaus. Seine Feldgleichung⁵ (zehn Gleichungen!) ist das beste, was es bisher auf diesem Gebiet gibt – leider unvereinbar mit der Quantentheorie!

Kurz und bündig fasst der Gravitationsphysiker John Wheeler (1911–2008) die Neuigkeit von 1915 in zwei Halbsätzen zusammen: „Die Materie sagt der Raum-Zeit, wie sie sich krümmen muss; die Raum-Zeit sagt der Materie, wie sie sich bewegen muss.“ Man beachte: Materie ist nicht bloß Stoff! Dazu zählt Energie in welcher Gestalt auch immer: Stoff, Stömung, Strahlung, Druck . . . – und vermutlich sogar das Schwerfeld selbst.

Nur eine leere Raum-Zeit ohne Gravitationswellen wäre flach. Statt des SRT-Pythagoras, $(s_2 - s_1)^2 = c^2 \cdot (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$, gilt nun für eng benachbarte Raum-Zeit-Punkte im Mathematiker-Steno $ds^2 = g_{ij} dx_i dx_j$, wobei vereinbarungsgemäß über alle Möglichkeiten ($i = 1 \dots 4, j = 1 \dots 4$) zu summieren ist und dx_1 für $x_2 - x_1$, dx_2 für $y_2 - y_1$, dx_3 für $z_2 - z_1$ und dx_4 für $c \cdot (t_2 - t_1)$ steht. Bei Abwesenheit von Gravitation geht die ART in die SRT über. Nur dann gilt der (Pseudo)Pythagoras.

Die Metrik g_{ij} wird aus Symmetriegründen ($g_{ij} = g_{ji}$) durch zehn Zahlenwerte bestimmt. Die Veränderung dieses sog. metrischen Tensors in der vierdimensionalen Raum-Zeit beschreibt deren Krümmung(en). In hinreichend kleinen Raum-Zeit-Gebieten, z. B. in kleinen fallenden Fahrstühlen, ist die

³In einer Rakete, die beschleunigt durchs All eilt, weil das Triebwerk arbeitet, erleidet ein horizontaler Lichtstrahl aus Sicht des Astronauten eine Ablenkung. Folglich muss es in einer auf dem Erdboden abgestellten Rakete ebenfalls eine Lichtablenkung geben. So will es das Äquivalenzprinzip.

⁴Die Anzahl der Bestimmungsstücke lässt sich auf sechs reduzieren.

⁵Falls es jemanden interessiert: $R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = \kappa \cdot T_{ij}$. Der Krümmungstensor R_{ij} ist durch die g_{ij} festgelegt. Das Ganze ist nichtlinear: Die Lösung für mehrere Quellen (T_{ij}) ist mehr als die Summe der Einzellösungen.

Raum-Zeit flach, und es gilt stets die SRT. Licht altert auch im Schwerfeld nicht ($\int ds = 0$).

G e r a d l i n i g k e i t wird jetzt mit dem Lichtstrahl assoziiert! Die allgemein-relativistische Lichtablenkung im Schwerfeld der Sonne konnte 1919 bei einer totalen Sonnenfinsternis nachgewiesen werden. Die Messungen waren zwar nicht sehr genau, aber Einstein der Held des Tages. Es sei angemerkt, dass bereits vor der ART von Lichtablenkung die Rede war. Der Wert, den die Newtonsche Theorie vorhersagt, stimmt mit dem von der SRT überein, ist aber nur halb so groß wie der ART-Wert (1,768 Bogensekunden am Sonnenrand).

Bei einem schwarzen Loch geht die Verbiegung so weit, dass Licht unwiderrufflich einbehalten wird.

Laut Einstein fällt ein Planet **k r ä f t e f r e i** („geradlinig“) um die Sonne, weil deren Masse⁶ die Raum-Zeit krümmt. Seine Weltlinie ist eine Geodäte, das Pendant zu einer Geraden in Minkowskis flacher Raum-Zeit. Für einen beliebigen Weltlinienabschnitt gilt Bertrand Russells (1872–1970) „Prinzip der kosmischen Faulheit“: Der Planet nimmt den denkbar langsamsten Weg! Jeder „Umweg“ verschlänge weniger Eigenzeit. Auf diesen Umstand war schon im ersten Teil dieses „Spazierganges“ hingewiesen worden.

Die ART-Effekte sind naturgemäß in Sonnennähe am größten. Tatsächlich ist Merkur als Testobjekt gefragt. Die relativistische Drehung seiner Ellipsenbahn, weil die Zeit nahe dem Perihel der Bahn langsamer als nahe dem Aphel vergeht, beseitigt eine Unstimmigkeit in der Newtonschen Himmelsmechanik.

Nur bei Behinderung des freien Falls, wie im Falle der (auf dem Gasstrahl oder dem Podest) ruhenden Rakete, weicht die Weltlinie eines Körpers vom geodätischen Verlauf ab. Geometriebedingte Kräfte sind Folge von Zwängen. Der geduldige Leser wird sich sagen „OK, das mag ja auf Planeten etc. zutreffen, doch hier unten, wo der Pythagoras auf dem Lehrplan steht und eine Pilotenuhr in 10 km Höhe kaum anders tickt als die meine, scheint mir, ist das irrelevant. Es mag ja sein, dass eine Uhr in 4,9 m Höhe **t h e o r e t i s c h** schneller tickt als die gleiche Uhr am Erdboden. Aber man mache mir nicht weis, ein Gangunterschied von einem halben Billiardstel bewirke etwas!“.

Newton sei, so die Legende, durch einen fallenden Apfel auf sein $1/r^2$ -Gesetz gekommen. Wie sieht Einstein diesen Fall?

⁶Nicht nur Masse! Alle Energiearten, Eigenbewegung, Rotation, Strömungen, Turbulenz, Druck, Strahlung . . . , tragen zur Krümmung der Raum-Zeit bei, der ganze sog. Energie-Impuls-Tensor T_{ij} .

Für ihn ist der hängende Apfel das Problem. Um am Ast zu bleiben muss der Apfel unablässig am Stiel „nach oben gerissen“, beschleunigt⁷ werden. Dieses Nach-oben-Reißen ist es, was ihn schwer macht! So sieht es der vorbeifallende Betrachter in seinem physikalisch bevorzugten Bezugssystem – bevorzugt, weil die SRT gilt. (Der Apfelstiel gleicht der Kette beim Kettenkarussell. Reißen Stiel und Kette, geht’s entlang einer Trägheitsbahn weiter.)

Apropos „Bleiben“: In der vierdimensionalen Raum-Zeit gibt es kein Verweilen. Zeit ist unerbittlich. Auch wer ruht, altert in jeder Sekunde 300 Millionen Meter!

Durch einen Windstoß vom Halt befreit, überlässt sich der Apfel kräftefrei einer Geodäte. Nachdem 300 Millionen Meter vergangen sind (also 1 s), kommt’s zum Bodenkontakt. Die Kollision ist unausweichlich, weil die Erdkruste „unfrei“ ist und keiner Geodäten folgt. Der feste Boden unter unseren Füßen stemmt sich dem freien Fall entgegen. (Die Startrampe „treibt“ eine ruhende Rakete mit 1 g an, wodurch diese stehen bleibt.) Die Notwendigkeit, die Eigenzeit bis zum Aufprall zu maximieren, führt auf das bekannte Fallgesetz: Fallstrecke = $(g/2) \times \text{Fallzeit}^2$. Das ist irgendwie verständlich: Um viele *tick, tick, tick, ...* einzusammeln, wird der Apfel möglichst lange in den oberen Regionen verweilen, wo Uhren schnell ticken. Die bodennahen, unteren Regionen, wo Uhren langsam gehen, wird er tunlichst schnell hinter sich bringen.

Man kann das Fallgesetz auch energetisch plausibel begründen. Je näher der Apfel der Erde kommt, desto langsamer verlaufen alle physikalischen Vorgänge. Die Frequenzen aller Apfelatome nehmen ab und damit die Energie. Da Energie etwas Erhaltenswertes ist, muss sich die Differenz in Bewegungsenergie wiederfinden. Die Geschwindigkeit nimmt zu. Nach einer Sekunde Fallzeit sind bereits 0,000 000 000 000 055 % von des Apfels $m \cdot c^2$ umgemünzt worden, d. h., der Apfel schlägt, wie von Newton berechnet, mit 9,8 m/s vor Newtons Füßen auf den Boden auf. Man könnte auch fragen, wie schnell etwas sein muss, damit sich, geschwindigkeitsbedingt, die Zeit um 0,55 Billionstel dehnt. Sie raten richtig: 9,8 m/s! Sage keiner, ein Effekt von einem halben Billionstel, mit dessen zahlenmäßiger Darstellung mein Taschenrechner ein Problem hat, wirke sich nicht auf den Alltag aus!

Obwohl Raum und Zeit verbandelt sind, haben wir uns auf die zeitliche Seite der Angelegenheit beschränkt. Das ist rechtens: Eine Zeitstrecke von

⁷Beschleunigung muss nicht Ortsveränderung bedeuten!

300 Millionen Metern ist eine Ewigkeit, verglichen mit 4,9 m durchmessenen Raumes. Timing ist alles! Das Global Positioning System basiert auf Uhren! Die Fallparabel des Apfels in der Raum-Zeit – also Höhe, aufgetragen über der Zeit (in Metern!) – unterscheidet sich kaum von einer Geraden. Der Krümmungsradius (c^2/g) beläuft sich auf ein Lichtjahr! Geht's um „Krümmung“, ist eine differenzierte Betrachtung vonnöten. Erstens gib's der Krümmungsmaße mehrere, und zweitens ist außerhalb der Erdkugel die Krümmung im M i t t e l notgedrungen Null, weil da bis auf ein bisschen Luft nichts ist, was die Raum-Zeit krümmen könnte!

Die Messung der Höhenabhängigkeit der Ganggeschwindigkeit irdischer Uhren (Atomkerne) gelang erstmals 1960 unter Ausnutzung des sog. Mößbauer-Effekts⁸. 1924 war der Einsteinturm in Potsdam in Betrieb genommen worden. Gründungszweck des Sonnenobservatoriums war der Nachweis der Gravitationsrotverschiebung (Zeitverlangsamung!) bei der Sonne.

Empirische Geometrie

Geometrie wird als Teilgebiet der Mathematik im Ideellen verortet. Ihre Lehrsätze sind zurückführbar auf die fünf Axiome (Postulate) des Alexandriner Euklid (4. Jh. v.u.Z.). Erst im 18. Jh. begann es Logikern zu dämmern, dass das fünfte Axiom ersetzbar ist. Es lautet in einer Formulierung⁹: Durch einen außerhalb einer Geraden gelegenen Punkt gibt es in der gemeinsamen Ebene genau eine Parallele. Gibt man das Parallelenaxiom auf, werden widerspruchsfreie Geometrien, nichteuklidische, denkbar, und es stellt sich die Frage nach der „zweckmäßigen“ Geometrie des Raumes. (Nicht die nach der „wahren“! Die ist unbeantwortbar.) Gibt es keine Parallele, ist das Gebilde elliptisch (positiv) gekrümmt, gibt es deren mindestens zwei¹⁰, ist es hyperbolisch (negativ) gekrümmt. Der euklidische Raum mit einer Parallele ist ein Spezialfall. Zur Veranschaulichung einer positiven Krümmung diene die Kugeloberfläche. Die Winkelsumme in einem sphärischen Dreieck übersteigt stets 180° , und Großkreise schneiden immer an zwei Punkten, können mithin nicht parallel zueinander sein. Ein Sattel steht für eine Fläche negativer

⁸Rudolf Mößbauer (1929–2011) erhielt für seine „rückstoßfreie Kernresonanzabsorption“ 1961 den Nobelpreis für Physik.

⁹Oder noch knapper: Es gibt Rechtecke. Man versuche, auf einer Kugeloberfläche ein solches, also mit vier rechten Winkeln, aus Großkreisabschnitten zusammenzusetzen!

¹⁰In Wirklichkeit sind es unendlich viele Parallelen.

Krümmung.

Ein Geometer, ein Landvermesser, wird ein Dreieck, realisiert mit Lichtstrahlen, allemal einem Gedankendreieck, konstruiert mit Geraden im Geiste, vorziehen. Er wird die Geometriefrage beispielsweise durch Messung der Innenwinkel eines realen Dreiecks zu lösen versuchen.

Ein solcher Mann war der *Princeps mathematicorum* Carl Friedrich Gauß (1777–1855). Ihm oblag zeitweilig sogar die Vermessung des Königreichs Hannover. Das Gerücht, er habe versucht, durch Messung der Innenwinkel des Dreiecks Hoher Hagen – Brocken – Großer Inselsberg die Raumkrümmung¹¹ zu bestimmen, wird immer wieder kolportiert. Wahr ist, dass Gauß eine handwerkliche Auffassung von Geometrie vertrat und sie damit aus ihrer apriorischen Abgehobenheit erlöste. (Für den Königsberger Philosophen Immanuel Kant (1724–1804) zählte die Euklidizität des Anschauungsraumes noch ganz selbstverständlich zur Vorbedingung von Erfahrung.) Vor Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1792–1856) und János Bolyai (1802–1860) ließ Gauß nichteuklidische Geometrien zu, behielt dies aber, um seine Reputation nicht zu gefährden, für sich. Nur einem Astronomen gegenüber erlaubte er sich eine diesbezügliche Andeutung.

Was Gauß 1828 mit Hilfe der Differentialgeometrie für verbogene Flächen gelang, deren Beschreibung¹² „von innen her“ durch die g_{ij} , übertrug 1854 sein Habilitant Bernhard Riemann¹³ (1826–1866) auf Räume beliebiger Dimension und Krümmungen. Man muss nicht ins Fünfdimensionale gehen, um die Metrik der Raum-Zeit auszuloten! Bloß groß genug müssen sie sein, die auszumessenden geometrischen Gebilde. Im unendlich Kleinen herrschen stets euklidische Verhältnisse.

Wie ein Physiker mit einem Lineal die (mittlere) Raumkrümmung misst, dazu der geborene Physikdidaktiker Richard Feynman (1918–1988): Man stelle sich eine homogene Kugel von Erdgröße und -masse vor. Mit einer 1-m-Latte bestimme man die Quadratmeteranzahl der Erdoberfläche. Anschließend bohre man ein Loch zum Erdmittelpunkt und messe den Kugelradius.

¹¹Die Krümmung des Raumes ist eine Sache, die Krümmung der Raum-Zeit eine andere. Durch Licht verbundene Ereignisse haben Null-Abstand!

¹²Wobei Zylinder und Kegel wegen ihrer formtreuen Abwicklung auf eine Ebene ungekrümmt sind. Dass man mit einem ebenen Schnittmuster einen Menschen hauteng einkleiden kann, ist erstaunlich . . .

¹³Die „R“s in den Einsteinschen Feldgleichungen erinnern an dessen Leistung (wie vermutlich die g_{ij} an die Gauß’).

(Die Erde habe im Innern überall die gleiche Temperatur, so dass die Länge des Meterstabes sich nicht temperaturbedingt ändert.) Die Differenz aus gemessenem Radius und dem aus der Kugeloberfläche errechneten Radius, ist ein Maß für die mittlere Krümmung. Laut ART gilt für den Radienexzess die Formel: Gravitationskonstante \times Erdmasse $/ (3 c^2)$. Das sind 1 1/2 Millimeter. Die Erde ist weit davon entfernt, ein schwarzes Loch zu sein.