Der Kosmos-Bote August 2021

Kein der Geometrie Unkundiger betrete mein Haus!

Inschrift über dem Tor der platonischen Akademie (387 v. Ch.–86 v. Ch.)

Liebe Leserin, lieber Leser,

vor zweihundert Jahren, am 31. August 1821, wurde in Potsdam Hermann Ludwig Ferdinand Helmholtz geboren. Der Potsdamer Militärarzt und Königsberger Physiologe ging mit 50 als Professor der Physik an die Friedrich-Wilhelms-Universität. Er machte Berlin zu einem Zentrum der Physik. Unter seiner Ägide erstand die Physikalisch-Technischen-Reichsanstalt (1888) in Berlin-Charlottenburg. Der „Reichskanzler der Physik" verstarb 1894.

Geboren vor 150 Jahren, einen Tag vor Helmholtz' 50. Geburtstag, gilt Ernest Rutherford (1871–1937) als einer der größten Experimentatoren aller Zeiten. Er wurde bereits mit dem Nobelpreis (1908) für Chemie geehrt, bevor er seine bahnbrechenden Experimente auf dem Gebiet der Atom- und Kernphysik ausführte. Der Brite neuseeländischer Herkunft bewerkstelligte 1919 die erste künstliche Kernumwandlung (von Stickstoff in Sauerstoff) und ist u. a. der Namensgeber des Protons[1] (1920).

Helmholtz war vielseitig. Als Experte für physiologische Optik – er erfand den Augenspiegel – und Gesichtswahrnehmung war er wie kaum ein anderer an unserem „Weltbildapparat" (Konrad Lorenz) interessiert und betrat folgerichtig erkenntnistheoretisches Terrain – zum Ärger der beamteten Philosophenschaft.

An den Helmholtz'schen Überlegungen zur Grundlegung der Geometrie interessiert? Nun, dann lesen Sie bitte weiter!

Ihr Hans-Erich Fröhlich

[1] „Gesehen" hatte das Proton als erster der Entdecker der Kanalstrahlen (1886) Eugen Goldstein (1850–1930). Als der Helmholtzzögling keine Anstellung am Astrophysikalischen Institut in Potsdam bekam, weil die Astrophysiker mit kosmischer Elektrizität nichts am Hut hatten, ging er an die Berliner Sternwarte, wo er zur Freude seines Chefs, Wilhelm Foerster (1832–1921), künstliche Kometenschweife in Gasentladungsröhren produzierte.

Der Himmel im August

Abendstern Venus distanziert sich nur allmählich von der Sonne.

Im August stehen gleich zwei Planetenoppositionen ins Haus. Es beginnt mit der des Saturn am 2. August, die des Jupiter folgt am 20. Beide Riesenplaneten sind damit zur gleichen Zeit fast die gesamte Nacht über sichtbar.

Zwischen dem 9. und den 13. August ist verstärkt mit Meteoren zu rechnen. Das Perseidenmaximum wird für die Morgenstunden des 12. August erwartet.

Nicht-euklidische Geometrie

Vorurteile leben lange. Das ist kein Wunder. Erst ein überwundenes Vorurteil wird als solches erkannt. Die Wissenschaft begann mit einem Vorurteil, einem, das zwei Jahrtausende währte: der Geometrie Euklids. Wie ein moderner Mathematiker begründete Euklid (um 300 v. Chr.) die Geometrie, indem er von einem Satz von fünf Axiomen ausging, Feststellungen, die er für selbst-evident erachtete, d. h. für jedermann einsichtig und keiner weiteren Begründung bedürftig, und zog daraus rein deduktiv seine Schlüsse, z. B., dass die Innenwinkelsumme in einem Dreieck 180° betrage. Daran ist nichts auszusetzen. Treffen die Axiome zu, stimmt auch der Rest, sofern man sich an die Logik hält.

Einerseits erwies sich die Erfindung des formal-logischen Systems mit vorangestellen Axiomen in der Antike als einer d e r Ausgangspunkte der westlichen Naturwissenschaft, wie Albert Einstein (1878–1955) befand, andererseits sollte sich das Paradebeispiel eines solchen Systems, die euklidische Geometrie, gerade auch für Einstein als ein letztlich zu enges Korsett entpuppen.

1781 befand der Königsberger Gelehrte Immanuel Kant (1724–1804), der Raum sei (wie die Zeit) eine reine Anschauungsform, welche Erfahrung von Gegenständen erst ermögliche. Da aller Erfahrung Urgrund, könne man über ihn selbst nichts erfahren. In Ermangelung von Alternativen hielt Kant die Euklidizität des Raumes für *a priori* gegeben. Aus Sicht der evolutionären Erkenntnistheorie ist da etwas dran: „Der Euklid“ ist anscheinend in unseren Köpfen fest verdrahtet, weil alles andere dem Überleben unserer stammesgeschichtlichen Vorfahren mit Sicherheit abträglich gewesen wäre.

Zweifel an Euklids fünftem Axiom, dem Parallelenaxiom, tauchten Anfang[2] des 19. Jh. auf. Das Axiom besagt, dass durch einen Punkt, der nicht auf

[2] Schon zuvor hatten Gelehrte vergeblich versucht, sich des unbehaglichen fünften Axioms durch Rückführung auf die vier anderen zu entledigen.

einer Geraden liegt, es genau e i n e Parallele zu dieser Geraden gäbe, die in der durch Punkt und Gerade definierten Ebene verläuft. Parallelen schneiden einander nie, höchstens im Unendlichen, wie ein Blick entlang einer schnurgeraden Bahnstrecke lehrt, wo die beiden Schienenstränge im Gesichtsfeld zusammenlaufen.

Auf dem Parallelenaxiom beruht u. a. auch der Innenwinkelsatz! Die Summe aller Innenwinkel eines Dreiecks sind zwei Rechte. Was zu denken gibt: Das Dreieck vor mir, es wird bestimmt durch etwas, was weit weg[3] von mir geschieht (oder nicht geschieht)!

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) hatte richtig vermutet: Das Parallelenaxiom ist verzichtbar. Zwei Fälle von in sich widerspruchsfreien Geometrien und ein Grenzfall sind zu unterscheiden: (i) Es gibt keine einzige Parallele (Innenwinkelsumme im Dreieck $> 180°$), (ii) es gibt deren unendlich viele (Winkelsumme $< 180°$), und es gibt (iii) den euklidischen Grenzfall mit nur einer einzigen Parallele (Winkelsumme $= 180°$). Wobei die Ecken der Dreiecke selbstredend durch kürzeste Linien verbunden sind – Geodäten[4]. (Man kennt das vom Globus[5]. Die kürzeste Flugverbindung zwischen zwei Orten ist Teil des Großkreises, der durch beide Orte geht.) Das Besondere am Raum mit positiver Krümmung (i): Die sog. 3-Sphäre ($x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = r^2$) ist endlich, aber unbegrenzt. Einstein war 1917 von der Möglichkeit eines grenzenlos endlichen Kosmos (mit dem Weltradius r und eingebettet in einem vier-dimensionalen euklidischen Raum) fasziniert.

Wer meinte, die Mathematik sei bloß reicherhaltig als die Wirklichkeit – d. h, das, was mathematisch existiere, müsse keine Entsprechung in der Wirklichkeit haben –, wurde eines besseren belehrt. 1919 wurde bei einer Sonnenfinsternis die von Einstein vorhergesagte[6] Krümmung von Lichtstrahlen durch die Anwesenheit einer Masse, der Sonne, bestätigt. Selbst auf der Erde ist die Nicht-Euklidizität (der Raum-Zeit) nicht nur von akademischem Interesse. Sie ist für jedermann spürbar: Wir fühlen die Schwerkraft. Dennoch: Um

[3] Wie man das Unendliche bändigt, zeigt M. C. Escher (1898–1972), der von der hyperbolischen Geometrie Lobatschewskijs angetan war, in seinen „Kreislimit“ Holzschnitten.

[4] Als Leiter der Hannoverschen Landesvermessung (1818 bis 1826) war Gauss bewusst, dass er Licht mit Geradlinigkeit gleichsetzte. Die Legende besagt, er habe nach einer Abweichung der Winkelsumme in einem Dreieck von 180° gesucht. Das Gauss'sche Dreieck bestand aus den Gipfeln dreier Berge: Hoher Hagen, Brocken und Großer Inselsberg.

[5] Die sphärische Trigonometrie der Seeleute ist auch euklidisch! Die Kugelerde wird eingebettet betrachtet in einem euklidischen Raum.

[6] Zu Einsteins „Glück“ fiel die Sonnenfinsternisexpedition von 1914 kriegsbedingt aus. Er war zu diesem Zeitpunkt noch von einer halb so starken Lichtablenkung ausgegangen.

sich im Alltag räumlich zu orientieren, ist die euklidische Näherung völlig ausreichend. Für Lebewesen, die sich schnell entscheiden und auf ihren Energiekonsum achten müssen, wäre es geradezu fatal, *richtig* zu rechnen. So genau kommt's im Leben auf die Winkelsumme nicht an. Die natürliche Selektion, die auf's Überleben achtet, nicht auf die Wahrheit, bevorzugt das Einfachere – Euklid!

Gauss war, obwohl er nie darüber publiziert[7] hat, für die jüngeren „nichteuklidischen" Geometer eine Art Übervater. Die Pioniere der neuen Sparte, Nikolaj Iwanowitsch Lobatschewskij (1792–1856) aus Kasan und János Bolyai (1802–1860) aus Klausenburg (Cluj) haben Anerkennung erst nach ihrem Tod erfahren. Zu ungewöhnlich waren den Zeitgenossen diese Ideen ...

Helmholtz und die Geometrie

„Anschauungen, die man hat, sich wegdenken ist leicht; aber Anschauungen, für die man nie ein Analogon gehabt hat, sich sinnlich vorstellen ist sehr schwer."

Helmholtz sah die Geometrie mit den Augen des Empirikers. Für ihn war der Abstand zweier Punkte die Länge der Stange dazwischen. Anstatt wie ein Landvermesser kürzeste Lichtwege zu betrachten, ging er von der Tatsache der freien Beweglichkeit eines s t a r r e n Körpers aus. (Helmholtz spricht vom f e s t e n Körper.) Sein Nachdenken „Ueber die Thatsächlichen Grundlagen der Geometrie" bereitete den Boden für Einsteins Forderung nach einer vom Koordinatensystem (Bezugssystem) freien Darstellung physikalischer Theorien.

Ihm lag daran, in der Geometrie „Wahrheiten von thatsächlicher Bedeutung" zu trennen von bloßen Definitionen und logischen Schlussfolgerungen. Dabei stützte er sich allein auf die analytische Geometrie, da dadurch „die Gefahr, dass sich gewohnte Anschauungsthatsachen als Denknothwendigkeiten unterschieben könnten, ganz wegfällt."

Welche Eigenschaften muss der drei-dimensionale Raum haben, damit sich ein x-beliebiger ausgedehnter Körper ohne Änderung der Gestalt verschieben und drehen lässt? (Die Forderung nach unbeschränkter Beweglichkeit fand der Kosmos-Bote der Mitteilung wert!) Die Rede ist von seiner Metrik.

[7] Wie er 1829 an Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846) schrieb, scheue er „das Geschrei der Böotier".

Die Metrik definiert den Abstand zwischen zwei Punkten des Raumes. Der Abstandsbegriff ist fundamental. Während im Falle des euklidischen Raumes, sich die Länge einer Strecke, Δl, sofort aus den Koordinatendifferenzen der Endpunkte ergibt – unter Verwendung rechtwinkliger Koordinaten gilt $(\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$ –, bedarf die Berechnung der Länge einer Geodäten des Aufsummierens (Integrierens) infinitesimaler Linienabschnitte. „Der Pythagoras“ gilt nur noch bei kleinen Abständen. Nur im Kleinen ist die Welt noch eben.

Betrachten wir zunächst der Anschaulichkeit halber eine beliebig geformte Fläche. So eine zwei-dimensionale Mannigfaltigkeit ist eine Welt in sich. Alles spielt sich ausschließlich in ihr ab. Ein außerhalb (ober- bzw. unterhalb) existiert für die flächigen Bewohner der Fläche[8] nicht. Nun kopieren wir einen nicht zu kleinen Ausschnitt und versuchen, diesen in der vorgegebenen Fläche ohne Formveränderung zu verschieben und zu drehen. Das gelingt nur bei konstanter Krümmung, d. h., im Falle einer flachen Ebene (keine Krümmung), einer Kugel (positive Krümmung) oder einer Pseudo-Sphäre (negative Krümmung). Zur Illustration konstanter positiver Krümmung diene ein Globus. Schneiden wir ein größeres Gebiet der Erdoberfläche heraus, z. B. Russland – Deutschland wäre zu klein –, kann man dieses Russland trotz seiner Größe beliebig verschieben und drehen. Mit der echten Erde, einem abgeflachten Rotationsellipsoid bzw. Geoid ginge das nicht. Nur bei einer Kugel ist eine beliebig berandete Kalotte verschieb- und drehbar.

Im Dreidimensionalen gilt das Gleiche, wie Helmholtz 1868 rein analytisch herausfand. Ein ausgedehnter fester Körper[9], repräsentiert durch ein starres Punktsystem, kann im Raum deckungsgleich verschoben und gedreht werden, solange dieser e n t w e d e r euklidisch (eben) ist o d e r eine konstante (positive bzw. negative) Krümmung aufweist (sog. Riemannscher Kugelraum). Euklidizität ist also – wie beim zwei-dimensionalen Analogon – keineswegs denknotwendig! „Es gibt“, frei nach Shakespeare, mehr Freiheiten, „als unsere Schulweisheit sich träumt.“

Helmholtz argumentiert, es gäbe zwischen m Punkten eines n-dimensionalen Raumes $m(m-1)/2$ Abstände, sprich Gleichungen zwischen den Koordinaten, $n \cdot m$ Koordinaten sowie $n(n+1)/2$ Freiheitsgrade der Lage und Orientierung. Das algebraische Problem ist überbestimmt, wenn $m > n+1$. (Auf einer gekrümmten Fläche, $n = 2$, wackelt i. a. ein vierbeiniger Tisch, $m = 4$, ein dreibeiniger hingegen nicht.) Soll trotz Überbestimmtheit Bewegungsfreiheit herrschen, schränkt dies die Abstandsdefinition (Metrik) ein. Helmholtz bezeichnet letztere als die „allgemeinste Form des Pythagoräischen Lehrsatzes“.

[8] Eine Fläche muss nicht flach im Sinne von eben sein!

[9] Erst 1905 hatte Einstein dem s t a r r e n Körper mit seiner Relativitätstheorie endgültig den Garaus gemacht.

Für Helmholtz war ein endlicher Kosmos, ein Raum positiver Krümmung, ein Unding. Behält man eine einmal eingeschlagene Richtung bei, gelangt man unweigerlich zum Ausgangspunkt zurück, wie im Falle der Kugeloberfläche. Da Helmholtz den Raum konstanter negativer Krümmung – Lobatschewskijs hyperbolischen Raum – schlicht übersehen hatte, befand er voreilig, angesichts des „Grad[es] von Festigkeit und von Beweglichkeit der Naturkörper, der unserem Raum zukommt“ müsse ein unendlicher Raum euklidisch sein. Er fand den Fehler aber schnell selbst heraus.

Ein Rätsel ist, warum das Universum im Großen und Ganzen f l a c h ist.

Dass Helmholtz’ Bemühungen zur Grundlegung der Geometrie kaum bekannt sind, hat einen Grund. Der Göttinger Gaussnachfolger, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), kam ihm zuvor. Riemann hatte die Gauss-Idee, eine beliebig gekrümmte Fläche allein *aus sich selbst heraus* (differentialgeometrisch) zu beschreiben, ohne Bezug auf den umgebenden Raum, auf „Flächen“ höherer Dimensionenzahl verallgemeinert. Er spricht von n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten[10]. Einstein brauchte sich ein halbes Jahrhundert später nur bei Riemann zu bedienen. Für Bertrand Russell (1872–1970) ist deshalb Riemann der unmittelbare Vorgänger von Einstein. Ohne Riemann keine Allgemeine Relativitätstheorie! Allerdings mauserte sich der drei-dimensionale Raum unter Einstein zur vier-dimensionalen Raum-Zeit[11], deren Metrik vom stofflich-energetischen Inhalt, Massendichte und Druck, festgelegt wird. (Die sog. Energie-Impuls-Dichte hängt von der Bewegung des Betrachters ab. Für einen Fallenden ist, sofern er klein genug, s e i n e Welt euklidisch!) Das, was man einst Gravitationsfeld nannte, ging in Raum-Zeit-Metrik auf.

Die Raumfrage wurde von einer rein geistig-philosophischen, der Einsicht in das Wesen ideeller Figuren, zu einer Frage des Messens mit wirklichen Gegenständen degradiert – zu einer Sache der Erfahrung. Salopp formuliert: Die „zweckmäßige“ Geometrie ist jene, welche die Formeln der Physiker frei von unmessbaren Größen und möglichst kurz macht, wobei was „kurz“ bedeutet, Ansichtssache ist, vielleicht sogar eine Frage der Ästhetik.

[10] Mit ortsabhängigen Krümmungen. Das erlaubt nur noch das Bewegen und Drehen k l e i n e r Körper. Die kilometerlangen „Antennen“ der Gravitationswellenastronomen sind vergleichsweise g r o ß und werden messbar deformiert!

[11] In älteren Veröffentlichungen ist die Raum-Zeit der Speziellen Relativitätstheorie oft vier-dimensional euklidisch gegeben, was dank eines Tricks, der Einführung einer imaginären Zeitkoordinate, formal möglich ist. (Zeitdifferenzen sind nach Multiplikation mit der Lichtgeschwindigkeit Streckenabschnitte.)