Liebe Leserin, lieber Leser,

vor einhundert Jahren erschien bei Teubner der Astroklassiker „Gaskugeln“. Sein Autor, der Meteorologe und Luftfahrtpionier Robert Emden, brachte uns in diesem Buch mit einem Schlag das Innere der Sterne näher. Er untersuchte das mechanische Gleichgewicht von sog. polytropen Gaskugeln unter der Wirkung ihrer eigenen Schwere. Emden stammte aus St. Gallen und lehrte an der Münchener Technischen Hochschule, damals noch eine königliche. Mit seinem Schwager Karl Schwarzschild, dem berühmten Astronomen, teilte er nicht nur wissenschaftliche Interessen. Beide waren begeisterte Ballonpiloten, Emden sogar ein preisgekrönter.

Später zeigte sich, dass die Emdenkugeln für das Verständnis von noch ganz anderen Himmelskörpern wesentlich sind, von weißen Zwergen beispielsweise oder interstellaren Molekülwolken.

Ein frohes Osterfest wünscht Ihnen

Ihr Hans-Erich Fröhlich

Der Himmel im April

Von den Planeten beeindruckt Venus als Abendstern. Sie ist immer noch weiter von uns entfernt als die Sonne und erscheint uns entsprechend klein, bloß 15 Bogensekunden misst ihr Durchmesser. Zum Zeitpunkt der Erdnähe, Mitte August, wird sie vierfach so groß sein, allerdings ist sie dann, der Sonne wegen, nicht so ohne weiteres zu sehen.

Jupiter hat es jetzt schon auf 40 Bogensekunden gebracht. Ende April steht er bereits vor Mitternacht auf. Er verbringt fast das ganze Jahr im Sternbild Schlangenträger. Am 6. April kehrt sich seine Bewegung am Himmel, relativ zu den Sternen, um. Nach dem Durchlaufen dieses Wendepunktes steuert er geradewegs auf die Opposition am 6. Juni zu. In dieser Schleifenbewegung spiegelt sich die Bewegung des Beobachters wider. Von der Sonne aus gesehen bewegt sich Jupiter immer rechtläufig, weshalb ja das heliozentrische System das angemessenere ist.

Was Jupiter noch vor sich hat, hat Saturn bereits hinter sich. Er bewegt sich ab dem 20. April wieder richtig, d. h. entgegen den Uhrzeigersinn, unter den Sternen.

Marsenthusiasten müssen sich mit Geduld wappnen. Ihre Zeit kommt in der zweiten Jahreshälfte.

100 Jahre „Gaskugeln“

So ein Stern befindet sich im mechanischen Gleichgewicht: Der Druck in seinem Innern ist an jeder Stelle so bemessen, dass er das Gewicht der darüber befindlichen Schichten auffängt. Zum mechanischen Gleichgewicht gesellt sich das energetische. Der Energiestrom nach außen kompensiert die Strahlungsverlusste durch Abstrahlung, ansonsten käme es zu Hitzestau oder Auskühlung. Der Energiestrom wird durch den Temperaturunterschied zwischen innen und außen getrieben. Wärme fließt vom Heißen zum Kalten. Um das mechanische Problem zu lösen, die Druckschichtung, muss zugleich das energetische angegangen werden: In die Berechnung des Drucks fließt nämlich die Temperatur ein. Deren Abfall ist nur über den Energiestrom zu haben. Der Druck ist (im Idealfall) gegeben durch das Produkt aus Dichte und Temperatur.
All dies war bekannt vor 100 Jahren. (Karl Schwarzschilds bahnbrechende Göttinger Arbeit über den Strahlungstransport war 1906 erschienen.)
Von der Berechnung realistischer Sternmodelle war man indes noch meilenweit entfernt. Probleme bereitete vor allem die energetische Seite des Problems. Dazu hätte man mehr über das Sternenmaterial wissen müssen. (Die Energiequelle selbst spielt für den inneren Aufbau zunächst keine Rolle. Sie bestimmt lediglich die Zentraltemperatur – die Fusionsreaktionen müssen zünden – und die Lebensdauer des Sterns.)

Da hatte der Schweizer Robert Emden eine glorreiche Idee. Er konzentrierte sich voll und ganz auf die mechanische Seite der Angelegenheit. Die Temperaturschichtung ignorierte er. Die Temperatur wird irgendwie mit dem Druck anwachsen, sagte er sich, und dies modellierte der Atmosphärenfroscher mit einem aus der Meteorologie bekannten Gesetz. Der Druck sollte überproportional mit der Dichte anwachsen, also bot sich zur Beschreibung ein Potenzgesetz an: Druck proportional einer Potenz (größer als eins) der Dichte, $p \propto \rho^k$. (In einer konvektiven Atmosphäre gilt genau dies. Der Index k hängt dann nur von der Natur des Gases ab, ob ein-, zwei- oder mehratomig.) Damit waren die mechanische und die energetische Seite des Problems entkoppelt und man konnte sich an die Berechnung des inneren Aufbaus eines Sterns wagen! Allerdings war da noch der unbestimmte Parameter, der sog. Polytropenexponent, den wir mit Karl Schwarzschild k nennen wollen.

Die Emdenschen polytropen Gaskugeln waren bahnbrechend. Für eine Reihe von Fällen geben sie sogar die korrekte Lösung: bei nahezu vollkonvektiven Sternen, bei Sternen, wo der Strahlungsdruck in einem festen Verhältnis zum Gasdruck steht … Riesensterne kann man modellieren, indem man auf eine Emdensche Gaskugel eine Kugelschale mit einem anderen k-Wert aufsetzt. Der Emdensche Ansatz jedenfalls war eine Sternstunde der Sternphysik. Das ganze Problem reduzierte sich, mathematisch gesprochen, auf die Lösung einer einzigen Differentialgleichung (der sog. Lane-Emden-Gleichung). Die hatte es zwar immer noch in sich, aber Astronomen waren damals noch unermütliche und geübte Rechner, die sich nicht so leicht abschrecken ließen … (Zur Not konnte man ja graphisch integrieren.)

Die erste Überraschung: Es gibt keine isothermen Sterne. „Isotherm“ bedeutet, alle Teile des Sterns haben die gleiche Temperatur. Isotherme Sterne wären nicht nur unendlich ausgedehnt, sie hätten auch unendliche Masse. Nun, dies juckt uns wenig, da Sterne eben nicht isotherm sind. Ohne Temperaturabfall nach außen, leuchteten sie nicht. Die Nichtexistenz endlicher *isothermer* Gaskugeln hat dennoch Folgen, nicht für Sterne, aber für Haufen aus Sternen, für Kugelsternhaufen (und sogar für Globulen, das sind interstellare Gaswolken). Dazu identifizieren wir einmal die Einzelsterne eines Kugelsternhaufens mit den Atomen eines Gases. Dann ist ein Kugelsternhaufen nichts anderes als ein Gasball unter der Wirkung der eigenen Schwere! Die Geschwindigkeiten, mit denen die Sterne in einem Kugelsternhaufen umherschwirren, wird dann zur Geschwindigkeit von Gasatomen. Dem Gravitationsfeld ist völlig egal, was da herumschwirrt, seien es Atome oder Sterne. (Alles fällt im Schwerefeld bekanntlich gleich schnell!) Die „Temperatur“ des Sternen„gases“ ist in der Tat überall die selbe. Da die Gleichung keine stationären endlichen Kugelsternhaufen zulässt, müssen diese sich notgedrungen entwickeln, verändern. Dies geschieht durch „Verdampfung“. Sie verlieren Sterne und Energie. Eine Emdenkugel, die Energie verliert, wird heißer. (Formal hat sie eine *negative* Wärmekapazität. Wenn das Schwerefeld mitmischt, spielt die Thermodynamik verrückt. Sterne sind schon etwas besonderes und liegen außerhalb der Alltagserfahrung des irdischen Physikers.) Das bedeutet, die Sterngeschwindigkeit nimmt zu, wodurch noch mehr Sterne abdampfen … Ein Teufelskreis! Der Kern eines isothermen Kugelsternhaufens schrumpft im Laufe der Zeit zu einem Punkt unendlich hoher Dichte (sofern dem nicht andere Vorgänge, wie die Bildung enger Doppelsterne entgegenstehen)! Und all dies nur, weil es für ein wirkliches Problem keine mathematische stationäre Lösung gibt. „Kollabierte“ Kugelsternhaufen gibt's anscheinend tatsächlich: M15 ist ein guter Kandidat.

Die Emdenschen Gaskugeln geben die wirklichen Verhältnisse erstaunlich gut wieder. Nehmen wir die Sonne. Ausgeklügelte Sonnenmodelle, wie sie heutzutage ein Computer in Sekundenschnelle ausspuckt, geben die Zentraltemperatur der Sonne mit 15,6 Millionen Grad an, eine $k = 4/3$-Emdenkugel von einer Sonnenmasse und einem Sonnendurchmesser hätte eine Zentraltemperatur von 12 Millionen Grad.

1914 wurde entdeckt, dass es sich beim Siriusbegleiter um einen weißen Zwerg handelt. Ein weißer Zwerg wird vom sog. quantenmechanischen Entartungsdruck des Elektronengases getragen. In einem weißen Zwerg könnte die Temperatur theoretisch am absoluten Nullpunkt sein, er wäre trotzdem nicht kleiner. Der temperaturbedingte Druckanteil ist belanglos. Unter diesen Umständen gilt der Emdensche Polytropenansatz exakt. Sogar der Vorfaktor ist durch die Quantenphysik festgelegt. Was als Not- und Verlegenheitslösung begonnen hatte, entpuppte sich als *die* Lösung schlechthin. Für massearme weiße Zwerge gilt $k = 5/3$. Die Lane-Emden-Theorie sagt dann voraus, dass mit zunehmender Masse der Radius kleiner wird! Je grösser die Masse, desto grösser also Dichte und Druck. Ab einem gewissen Druck bewegen sich die freien Elektronen in einem weißen Zwerg mit nahezu Lichtgeschwindigkeit. (Die freien Elektronen sind der Träger des Druckes.) Da sie wegen Einstein nicht schneller werden können, nehmen sie an Masse zu. Man sagt, sie seien relativistisch entartet. Für diesen Fall, also bei extrem hoher Dichte, gilt exakt $k = 4/3$. Der Druck nimmt nicht mehr ganz so schnell mit der Dichte zu wie im nichtrelativistischen Fall. Das Material wird irgendwie „weicher“ und ist nicht mehr so belastbar. Nun die Überraschung: Für $k = 4/3$ gibt es überhaupt keine Masse-Radius-Beziehung! Eine solche Gaskugel kan man (homolog) zusammendrücken oder auseinanderziehen. Sie ist immer im mechanischen Gleichgewicht. Bei einem weißen Zwerg gilt das 4/3-Gesetz allerdings nur für Dichten, die gegen Unendlich gehen. (Man kann einen solchen

Stern nicht aufblasen ohne k zu vergrößern.) Bei vollständiger relativistischer Entartung ist nur noch eine einzige Masse möglich und damit Punktum: die Chandrasekharsche Grenzmasse von 1,4 Sonnenmassen.

Chandrasekhar verallgemeinerte die Emden-Theorie und löste das mathematische Problem des kontinuierlichen Übergangs von $k = 5/3$ zu $k = 4/3$, also von nicht-relativistischer zu relativistischer Entartung. (Die Emden-Theorie beschreibt nur die Grenzfälle.) Chandrasekhar war es auch, der sich als 19jähriger Student fragte, was eigentlich aus einem Stern mit mehr als 1,4 Sonnenmassen am Ende seines Lebens wird, wenn die thermonukleare Energieproduktion zum Erliegen kommt. Da es keinen akzeptablen stationären Endzustand gibt, muss ein solches Objekt kollabieren, zu einem Neutronenstern bzw. zu einem schwarzen Loch.

Für Kugeln is $k = 4/3$ deshalb ein kritischer Fall, weil dann kein Minimum der Gesamtenergie mehr existiert. Für darüberliegende k-Werte hat eine Emdensche Gaskugel vorgegebener Masse einen Radius, bei dem die Gesamtenergie (gravitative und druckbedingte) ein Minimum annimmt. Ein solches Gebilde ist stabil. Es schwingt schlimmstenfalls um diese Gleichgewichtslage. Für $k \leq 4/3$ ist die Katastrophe vorprogrammiert. Das stabile Minimum schlägt um in ein instabiles Maximum. Bei einer Supernovaexplosion „denkt“ auch ein Sternenkern, er könne seinen k-Index ungestraft auf $4/3$ verkleinern …