

Liebe Leserin, lieber Leser,

auch ein Todestag kann ein willkommener Anlass sein. Vor 150 Jahren, am 2. September des Jahres 1865 verstarb kurz nach Vollendung seines 60. Lebensjahrs in seinem Geburtsort Dublin Sir William Rowan Hamilton (1805–1865). Das Auffällige an diesem Royal Astronomer of Ireland war, dass er, obwohl Direktor der Dunsinker Sternwarte, den Himmel kaum eines Blicks würdigte. Er bettelte auch nicht um moderne Instrumente. Man nahm keinen Anstoß daran – Instrumente sind teuer – und ließ ihn gewähren. Und das war gut so. Man ließ dem kautzigen Gelehrten auch durchgehen, dass er sich am Abend des 16. Oktober 1843, bei einem Spaziergang mit seiner Gattin, an der Broom-Brücke „verewigte“, indem er voller Freude über einen Einfall „ $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$ “ und „ $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$ “ in den Stein ritzte. Eine Gedenkplakette erinnert an das „Graffito“. Dieser Geistesblitz – man beachte, dass Hamiltons Regelwerk das Gesetz von der Vertauschbarkeit der Faktoren außer Kraft setzt! – öffnete ihm das Tor zur Unsterblichkeit – und veränderte nachhaltig seine Sicht auf die physikalische Welt. Wie der gute Mann herausfand, kann man die Rechenregeln für die komplexe Zahlenebene zwar nicht auf den Raum, also ins Dreidimensionale, verallgemeinern, dafür aber ins Vierdimensionale! Das unterscheidet unsereinen, dem schon das Imaginäre ($i^2 = -1$) nicht geheuer ist, von dem Mathematiker. Warum sich mit e i n m a l imaginär (i) zufrieden geben, kann man es d r e i f a c h (i, j, k) haben? Die harmlose komplexe Zahl des Elektrotechnikers, bestehend aus Real- und Imaginärteil, sie schwoll unter Hamiltons Geniestreich monströs zur Q u a t e r n i o n (Vierheit¹) an. Beispiel gefällig? Die folgende „Zahl“ ist eine Quaternion: $a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$, wobei a, b, c und d reelle (d. h. „normale“) Zahlen und die i, j und k imaginäre Einheiten sind. Die Idee von einer v i e r d i m e n s i o n a l e n Mannigfaltigkeit, der Raum-Zeit, hat die Physiker seit dem nicht mehr losgelassen.

Wozu das alles? Nun, mit Quaternionen lässt sich leicht der Vier-Quadrat-Satz beweisen: Jede natürliche Zahl ist die Summe von höchstens vier Quadratzahlen². Quaternionen spielen eine Rolle, geht es um Symmetrien (Kri-

¹Das ist bloß der Einstieg in die Welt der hyperkomplexen Zahlen!

²Eine mögliche Zerlegung von 2015 lautet beispielsweise $18^2 + 21^2 + 25^2 + 25^2$.

stallographie) oder Drehungen. (Die schnellen Schwenks der Pluto-Sonde New Horizons beim Durchsausen des Pluto-Systems sind sicherlich mit Quaternionenmathematik berechnet worden.)

Doch damit nicht genug. Man kann auch die Newtonsche Mechanik, sprich die Himmelsmechanik, ohne Not verkomplizieren. Und das Seltsame daran, es kommt exakt dasselbe dabei heraus. Doch hier wurde ein großer Aufwand keineswegs schmählich vertan. Hamiltons formal-mathematische Sicht auf die physische Welt erwies sich als ungeheuer fruchtbar. Die Quantenmechanik bediente sich Jahrzehnte später seiner. Dreh- und Angelpunkt ist die $H(!)$ -Funktion.

Ein Ding ohne Not von verschiedenen Seiten zu betrachten, kann intellektuelles Vergnügen bereiten! Ein solches wünscht den Lesern des Kosmos-Boten
Hans-Erich Fröhlich

Der Himmel im September

Venus ist Morgenstern und zeigt sich am 21. im größten Glanz (-4,8 Größenklassen). Sie entfernt sich, und ihre Sichel verliert schnell an Winkelgröße.

Auch Mars und Jupiter tauchen allmählich am Morgenhimmel wieder auf. Am 10. September gesellt sich der abnehmende Mond hinzu. Bei freiem Horizont dürfte der Anblick kurz vor Sonnenaufgang für den Kurzschlaf entschädigen.

Saturn ist nur noch kurz vor seinem Untergang im Westen sichtbar.

Der Vollmond in den Morgenstunden des 28. fällt aus. Grund ist eine totale Mondfinsternis. Finsternismitte ist kurz vor 5 Uhr MESZ. Der Mond hält sich eine gute Stunde im Kernschatten der Erde auf. Wie schon in den vergangenen Monaten fällt Vollmond mit dem Durchgang durchs Perigäum zusammen. Das macht diesen Mond etwa $1/7$ größer als einen Apogäumsvollmond.

Astronomischer Herbstbeginn ist am 23. September um 10 Uhr 28 MESZ.

In der Nacht vom 4. auf den 5. September durchquert der Halbmond die Hyaden. Kurz nach Sonnenaufgang wird Aldebaran bedeckt.

„Prinzipienreiterei“

Muss ein Schüler beim Thema „Optik“ drei Gesetze lernen: (1) Geradlinigkeit der Lichtausbreitung, (2) Reflexionsgesetz und (3) Schnellius’³ Brechungsgesetz? Es reicht, sich des F e r m a t schen⁴ Prinzips zu erinnern: Licht nimmt unter den gegebenen Bedingungen den schnellsten, den o p t i m a l e n Weg. Daraus folgen sowohl (1) wie auch (2) und (3). Sogar die Einsteinsche Lichtablenkung im Schwerfeld der Sonne ergibt sich daraus!

Für den Physiker Carl Friedrich von Weizsäcker (1912–2007) steht außer Zweifel, dass das Auffinden von Extremalprinzipien in der Natur geistesgeschichtlich nicht ohne Wirkung war. Leibniz’ vielzitiertes Wort von der „besten aller möglichen Welten“ belegt das. Die Welt ist zwar nicht 100%ig gut, aber o p t i m a l, auch wenn wir das mit unserem begrenzten Verstand nicht durchschauen, so der Universalgelehrte zur Rechtfertigung Gottes gegenüber Kurfürstin Sophie Charlotte (1668–1705). Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) war der erste „Optimist“.

Hamilton hatte sich mit Strahlenoptik befasst, insbesondere mit der Theorie optischer Abbildungsfehler. Er untersuchte mathematisch, was der Direktor der Leipziger Sternwarte Ernst Heinrich Bruns 1895 das E i k o n a l⁵ taufte: die fürs Licht schnellste Verbindung zwischen Objektpunkt und dessen Abbildung. Von der Optik war es für Hamiltons Genie nur ein kleiner Schritt zur Mechanik, der Frage, welche physikalische Größe eigentlich die reale Bewegung aller Planeten, Zwergplaneten, Planetoiden, Kometen, Monde eingeschlossen, im Sonnensystem zwischen, sagen wir, dem 1. und dem 30. September 2015 minimal macht.

Wie Hamilton für reibungsfreie⁶ Punktmassensysteme (also fürs Sonnensystem!) 1834/35 herausfand, ist es die über die Zeit aufsummierte Differenz aus kinetischer und potentieller Energie, die bei jeder wirklichen Bewegung, anders als bei einer davon abweichenden bloß gedachten, minimal⁷ wird. Die

³Willebrord Snel van Rojen, genannt Schnellius (1580–1626), hatte das Brechungsgesetz nach dem Studium von Keplers Schriften zur Optik entdeckt. In der Arabischen Welt kennt man es seit 984. Der Gelehrte Ibn Sahl (ca. 940–1000) beschreibt es in einer Schrift über Brennspiegel und Linsen.

⁴Pierre de Fermat (1607–1665).

⁵Im Zusammenhang mit der NSA-Affäre hat „Eikonol“ eine gewisse Popularität erlangt.

⁶Eine allumfassende Theorie kennt keine Reibung. Reibung subsumiert all jene Mikroprozesse, deren detaillierte Beschreibung man sich erspart.

⁷Mathematiker legen Wert auf die Feststellung, dass es sich nicht um ein Minimum

Summe, das Zeitintegral, nannte Hamilton Prinzipalfunktion, später sprach man von Aktion bzw. Wirkung. Eine Wirkung ist physikalisch von der Dimension Energie \times Zeit, Impuls \times Länge bzw. Drehimpuls \times Winkel. Durch geschicktes Umformen gelangte Hamilton zu einer einzigen Funktion, welche das mechanische System erschöpfend beschreibt – und jede Menge Vorteile bietet: Störungen beispielsweise, durch die Wechselwirkungen zwischen den Planeten, werden durch einen additiven Term erfasst. Erhaltungsgrößen lassen sich finden bzw. konstruieren. Die *H a m i l t o n f u n k t i o n* steht für die Gesamtenergie eines Systems, der Summe aus Bewegungsenergie (kinetische Energie) und Energie der Lage (potentielle Energie). Energieerhaltung ist in Hamiltons Formulierung der Mechanik eine mathematische Trivialität.

Als man das Atom als eine Art Miniatur-Planetensystem auffasste, bekam die „Wirkung“ plötzlich Bedeutung. Sie erwies sich als nicht beliebig teilbar. Mit dem Planckschen Wirkungsquantum kennt die Natur eine minimale Wirkung! Die Konsequenz: Der Elektronenplanet kann der Atomkernsonne nicht beliebig auf die Pelle rücken. Deshalb gibt es stabile Atome!

Versehen mit Hamiltons holistischer Sicht auf die Newtonschen Mechanik, sozusagen „von oben herab“, errieten die jungen Quantenphysiker um 1925 die Formeln der Quantenmechanik. Sie machten sich schnell frei von klassischen Vorurteilen wie Elektronenbahnen. Die sind unbeobachtbar, also gibt es sie auch nicht. Der Übergang von der klassischen zur Quantenmechanik vollzog sich binnen weniger Jahre. Man musste zur Kenntnis nehmen, dass es mehrere gleichberechtigte Beschreibungen⁸ der neuen Sparte gibt, Matrizenmechanik (Heisenberg), Wellenmechanik (Schrödinger), ... Dass es bei der Berechnung von irgendwelchen Produkten ggf. auf die Reihenfolge der Faktoren ankommt, war gewöhnungsbedürftig, aber so neu nicht. Kannte man ja von Hamiltons Quaternionen (oder der Matrizenmultiplikation)! Die Hamiltonfunktion begeistert seitdem den Physiker. Der Gang in die Abstraktion, von Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832) noch verteufelt, er lohnt: Der Mikrowelt Schönheit erschließt sich in abstrakten Symmetrien!

Zurück zur Makrowelt, zur Planetenmechanik! Für den Optiker ist der optische Lichtweg der wirkliche Weg gewichtet mit dem Brechungsindex. (Der Weg im Glas zählt länger.) Den optischen Lichtweg zu minimieren⁹ nimmt

handeln muss!

⁸Wie 1925 Paul Dirac (1902–1984) herausfand, handelt es sich um verschiedene „Bilder“ einer abstrakten Sache.

⁹Wie es scheint, probieren Photonen alle überhaupt denkbaren Wege aus. Durch de-

Licht eine insgesamt längere Wegstrecke in Kauf, bloß um den Weg durchs Glas kurz zu machen. Das erklärt die Lichtbrechung. Ersetzt man formal den Brechungsindex der Optik durch die Geschwindigkeit, wird die Analogie zwischen Optik und Mechanik deutlich: Jeder Planet durchläuft den in diesem Sinne kürzesten „Weg“. Es ist der mit der kleinsten Wirkung. (Ohne die Sonne wäre der kürzeste Weg tatsächlich eine Gerade.) Um die Priorität dieser Erkenntnis stritten zum Ärger Friedrich II. (1712–1786) Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759) und Leonhard Euler (1707–1783). Gewusst haben soll es bereits 1707 Leibniz, aber der korrespondierte mehr als er publizierte.

Der Hamiltonschen Prinzipienmechanik scheint die Kausalität abhanden gekommen zu sein, gar der Kraftbegriff. Doch die Überraschung kommt noch: Das Knacken der Extremalaufgabe, das Auffinden der Bahnkurve, läuft aufs Lösen einer Differentialgleichung (bzw. eines Systems von Differentialgleichungen) hinaus. Halten Sie sich fest: Es handelt sich um das allseits bekannte Newtonsches Gesetz: Kraft = Masse \times Beschleunigung! Die hehren Gesetze der Himmelsmechanik, sie sind aus einem Extremalprinzips ableitbar, wobei das Prinzip höher steht¹⁰: Aus ihm ergibt sich die Newtonsche Bewegungsgleichung. Das Umgekehrte gilt nicht, wie Richard Feynman (1918–1988) bemerkte.

Der Traum des Physikers: Alle Naturgesetze sind ableitbar aus einem Prinzip. Der Schüler hätte einen einzigen Satz sich zu merken. Der Rest ist Rechnen.

struktive Interferenz löschen sich bis auf den kürzesten (optischen) Weg alle aus. Werden durch ein Hindernis (Blende) Umwege abgeschnitten, erfolgt die Annullierung unvollständig. Es kommt zur Lichtbeugung. Das erklärt das begrenzte Auflösungsvermögen unserer Fernrohre. Damit ein Teilchen den optimalen Weg findet, muss es mit sich selbst interferieren können! Indem man Teilchen mit Welleneigenschaften ausstattet, macht das Prinzip der kleinsten Wirkung Sinn. Aus ihm ergibt sich die Quantenmechanik, wie Richard Feynman (1918–1988) als Student herausfand.

¹⁰Lehrbücher der mathematischen Mechanik beginnen deshalb meist mit Hamilton und nicht mit Newton.