Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.

David Hilbert, 1925

Liebe Leserin, lieber Leser,

im Fernsehen war „Georg Cantor – Der Entdecker der Unendlichkeiten“ zu sehen, eine Dokumentation zu Leben und Werk des Begründers der Mengenlehre. Anlass war sicherlich ein Todestag. Cantor lebte von 1845 bis 1918. Der gebürtige St.-Petersburger tat etwas, was in Berliner und Göttinger Mathematikerkreisen noch verpönt war: Er wagte sich ans Unendliche und förderte Erstaunliches zutage. Es gibt, wie aus dem Titel der Dokumentation ersichtlich, verschiedene Grade des Unendlichen! Bereits der niedrigste hatte seinerzeit den großen Galileo Galilei (1564–1642) das Fürchten gelehrt, worauf der Renaissancegelehrte sofort das Handtuch geworfen hatte. Galilei war während seines Hausarrests auf ein Paradoxon gestoßen: Obwohl die Quadratzahlen nur einen verschwindenden Bruchteil der natürlichen Zahlen ausmachen, muss es davon genau so viele geben wie von letzteren, schließlich ist jeder natürlichen Zahl, 1, 2, 3, 4, 5 . . . , ein-eindeutig ihr Quadrat, 1, 4, 9, 16, 25 . . . , zuordenbar. Dass der Teil nicht weniger als das Ganze sein kann, das ginge über den Verstand und sei eine Gottesangelegenheit, so Galileis Zeitgenossen. Daraufhin war lange Zeit Ruhe, bis, ja bis der Mann aus St. Petersburg, gestrandet in Halle, Georg Cantor, sich ernstlich des Problems annahm. Cantor drehte den Spieß einfach um und legte fest: Eine Menge, welche die von Galilei 1638 beobachtete paradoxe Eigenschaft hat, müsse eine unendliche sein.

Die Physiker lieben das Unendliche nicht. Sie haben aber damit umgehen gelernt. Astronomen haben da weniger Berührungsängste, Kosmologen gar keine. Dazu mehr im nächsten Monat. Der April sei ganz den Fundamentalisten unter den Mathematikern gewidmet! Was halten Sie von einem Horror-Trip auf dem Zahlenstrahl, sagen wir von Null bis Eins?

Zur Einstimmung etwas weit weniger Schreckliches: ein Hotelaufenthalt. Die Cantor-, pardon! – Händel-Stadt Halle ist eine Reise wert. Falls Sie Logis suchen, fragen Sie nach dem „Hilbert“. Der Hotelmanager hat bisher stets eine Lösung Ihres Übernachtungsproblems gefunden: Sollte das Hotel ausgebucht sein, ziehen alle Gäste einfach ein Zimmer weiter! Und das freiwerdende Zimmer mit der Nr. 1 bekommen Sie! So einfach ist das bei unendlich vielen Zimmern. Sollte es des Nachts laut werden, nicht wundern! Vermutlich ist ein Schwung neuer Touristen eingetroffen, ein Reisebus mit unendlich vielen Insassen. Auch das managt der Manager: Jeder Gast zieht in das Zimmer, dessen Nummer das Doppelte seiner bisherigen Zimmernummer ist. So wird Platz geschaffen für die restlichen Touristen des Universums. (Sogar die Ankunft unendlich vieler dieser vollbesetzten Reisebusse brächte das Management nicht in Verlegenheit!) Ist es denkbar, dass das Hotel dennoch aus den Nähten platzt? Ja, wenn zur unendlichen Touristenschar sich noch alle denkbaren Unterscharen gesellten. Bei Klonung ist das nicht ausgeschlossen. Das nach dem Göttinger Mathematiker David Hilbert (1862–1943) benannte Hotel verkraftet nur den untersten Grad an Unendlichkeit!

Schiller irrte, als er angesichts der Unendlichkeit ausrief: „Kühne Seglerin, Phantasie, wirf ein mutloses Anker hie.“ Man muss da nicht die Segel streichen! Vergnügen bei der Lektüre wünscht

Hans-Erich Fröhlich

Der Himmel im April

Merkur versteckt sich im Sonnenglanz. Er durchläuft am 1. April seine untere Konjunktion und zieht dabei nördlich an der Sonne vorbei. Venus ist Abendstern und als solcher der hellste „Stern“ am Himmel. Da sie sich uns langsam nähert, erscheint sie immer größer im Fernrohr.

Mars ist noch dem Morgenhimmel vorbehalten. Am 2. April wandert er südlich am Saturn vorbei. Jupiter bereitet sich auf seine Opposition am 9. Mai vor. Ende des Monats geht er bereits kurz nach 21 Uhr MESZ im SO auf. Saturn folgt dem Jupiter im Abstand von vier Stunden. Am 18. April herrscht Stillstand, womit die diesjährige Oppositionsphase eingeläutet wird. Die Saturn-Opposition selbst findet erst Ende Juni statt.

Mathematik ohne Grenzen

Die Mathematik des Unendlichen beginnt mit Aleph, $\aleph$, dem Anfangsbuchstaben[1] des hebräischen Alphabets. Seit Cantor wird die Mächtigkeit einer unendlichen Menge – bei einer endlicher Menge wäre das die Anzahl ihrer Elemente – mit Aleph bezeichnet. Die natürlichen Zahlen sind von der Mächtigkeit $\aleph_0$ (Aleph-Null). Jede Menge, die $1:1$ auf die Menge der natürlichen Zahlen abbgebildet werden kann, z. B. die Menge der Quadratzahlen, heißt abzählbar und hat dieselbe Mächtigkeit. Wichtig ist, es kommt nie auf die „Anzahl“ der Elemente einer unendlichen Menge an, sondern lediglich auf den Vergleich mit einer anderen Menge. Mit der Eins-zu-Eins-Zuordenbarkeit kriegt man das Unendliche zu fassen.

Wie die Erfahrung mit dem Hilbertschen Hotel lehrt, gilt $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$. (Man muss das nicht verstehen wollen! Die $\aleph$-Formeln sind fürs weitere Verständnis nicht wichtig. Sie sollen bloß bezeugen, dass selbst fürs Unendliche Rechenregeln gelten – zugegebenermaßen gewöhnungsbedürftige. Was einst dem Herrgott vorbehalten schien, kann jedermann erlernen! Aber mit „∞“ allein kommt man nicht weit.) Auch die Aufnahme von unendlich vielen Halle-Touristen war kein Problem, da $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ gilt. Aus $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$ folgt, dass geschultes Hotelpersonal in der Lage sein sollte, die Fahrgäste unendlich vieler vollbesetzter Reisebusse mit jeweils unendlich vielen Sitzgelegenheiten im „Hilbert“ unterzubringen.

Cantors große „Entdeckung[2]“ im Jahre 1873 war, dass es mächtigere Mengen[3] gibt als $\{1, 2, 3, \ldots\}$, die Standardmenge. Und davon eine ganze Hierarchie! Aleph-Null ($\aleph_0$) ist bloß ein Anfang, das kleinste der unendlichen Zahlenmonster! Es folgen $\aleph_1$, $\aleph_2$, … Ein Schluss-Aleph gibt es nicht (was den psychisch-labilen Mathematiker zu theologischen Spekulationen verleitete)! Sich eine Menge vorzustellen, die mächtiger als die der natürlichen Zahlen ist, ist denkbar einfach: Man kreiert einfach deren Potenzmenge. Diese ist die Menge aller Teilmengen einer Menge. Man erweitert dazu beispielsweise die Menge $\{1, 2, 3\}$ um die Elemente[4] $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$,

[1] Aleph hat zugleich den Zahlenwert „Eins“.

[2] Da die Mathematik keine Naturwissenschaft ist, fällt es schwer, von „Entdeckung“ zu sprechen.

[3] Wie üblich, wird eine Menge mit den Klammern „{“ und „}“ eingeschlossen.

[4] Nimmt man, um es sich leichter zu machen, die leere oder Null-Menge $\emptyset$, hinzu, gibt es für eine endliche Menge aus n Elementen genau 2^n Teilmengen. Bei $n = 3$ also 8, bei $n = \aleph_0$ entsprechend $2^{\aleph_0}$.

$\{1, 2, 3\}$ usw. Die Potenzmenge der natürlichen Zahlen ist bereits nicht mehr abzählbar. Die Potenzmenge der Potenzmenge der … erst recht nicht.

Eine reales Beispiel für eine ü b e r a b z ä h l b a r e Menge gefällig?

Dazu müssen wir vom Zählen zum Messen[5] übergehen, d. h., von den natürlichen Zahlen zu den reellen. Es reicht aus, den Bereich zwischen 0 und 1 auf der Zahlengeraden unter die Lupe zu nehmen. Durch eine harmlose Transformation, wie z. B. $y = (1 - 2 \cdot x)/(x^2 - x)$, lässt sich nämlich dieses überschaubare Segment auf die gesamte Zahlengerade (von $-\infty \ \ldots + \infty$) abbilden – und zwar ein-eindeutig, 1 : 1. Es klingt paradox, doch die reellen Zahlen außerhalb des Abschnitts erhöhen deren Mächtigkeit um keinen Deut[6]! Um dem Unendlichen zu begegnen, muss man sich nicht dorthin begeben.

Im 0-1-Intervall liegen zunächst einmal jede Menge echter Brüche: 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4 usw. Wie Cantor durch cleveres Umsortieren bewies, ist die Menge der echten Brüche und damit die aller Brüche abzählbar: Alle rationalen Zahlen (Brüche) können prinzipiell in einer durchnummerierten (unendlich langen) Liste erfasst werden! Cantor konnte es selbst kaum fassen.

Häufiger als die rationalen Zahlen sind die irrationalen. Sie sind nicht mehr als Quotient zweier ganzer Zahlen, p/q, darstellbar. Irrationale Zahlen sind, abgesehen von unendlich vielen Ausnahmen, t r a n s z e n d e n t[7]. Zu den bekanntesten Vertretern zählen die Kreiszahl π (= 3,14159…) und Eulers e (= 2,71828…), welches die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Diese unendlich langen, unperiodischen Dezimalzahlen vermasseln die Abzählbarkeit der reellen Zahlen! Es sind deren zu viele, *als dass sie sich auflisten ließen*! Der Beweis erfolgt ungefähr so – durch Konstruktion eines Widerspruchs: Gäbe es eine solche Liste, könnte man unschwer eine reelle Zahl aus dem Hut zaubern, die nicht in dieser vorkommen kann. Darauf hätte schon Galilei kommen können!

Was das bedeutet? Bei unserer kurzen Wanderung längs des Zahlenstrahls begegneten uns eigentlich nur transzendente Zahlen. Auf so etwas wie $1/\sqrt{2}$ oder den Goldenen Schnitt zu treffen, grenzt schon an ein Wunder, ist, mit

[5] natürlich mit beliebiger Genauigkeit

[6] Die Anzahl der Zahlenpunkte, die auf einen Zentimeter entfallen, ist die gleiche wie die entlang der Strecke zum Andromedanebel.

[7] Das Wort bedeutet „jenseits möglicher Erfahrung“. Zu den „Ausnahmen“ *zählen* $\sqrt{2} = 1,41421\ldots$ und der goldene Schnitt (0,61803…). Beide sind Lösungen algebraischer Gleichungen. Die Menge dieser algebraischen Zahlen ist abzählbar, da die Koeffizienten der Gleichungen ganze Zahlen sind.

Verlaub gesagt, seltener als ein „Sechser im Lotto". Einer Bruchzahl, einer Dezimalzahl mit periodischer Ziffernfolge, werden Sie so gut wie nie begegnen, obwohl es unendlich viele davon gibt! Fragte uns jemand nach einer x-beliebigen Zahl, uns fielen auf die Schnelle nur Zahlen ein, die so gut wie gar nicht vorkommen in der Zahlenwelt, wie 42 oder 2/5! Das Transzendente ($\pi, e \ldots$) ist nicht die Ausnahme! Unendliche Dezimalzahlen ohne eindeutige Periode sind die Regel! Das ist die Wahrheit – und das ist sogar gut. Es sind nämlich die seltenen rationalen Zahlen, die für Resonanzen in der Welt sorgen. Nehmen Sie 2/5. Auf zwei Saturnumläufe fallen im Langzeitmittel fünf vom Jupiter. Solche himmelsmechanischen Kommensurabilitäten setzen die planetare Ordnung aufs Spiel!

Da es keine Lücke auf der reellen Zahlengeraden gibt – die Zahlen liegen dicht an dicht –, pflegt man vom Kontinuum zu sprechen. Dessen Mächtigkeit wird mit $\aleph_c$ bezeichnet, wobei $\aleph_c = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$ gilt. 1878 vermutete Cantor, es gäbe zwischen $\aleph_0$ und $\aleph_c$ keine weitere Unendlichkeit, mit anderen Worten, $\aleph_c$ sei $\aleph_1$! An dieser K o n t i n u u m s h y p o t h e s e bissen sich die Mathematiker die Zähne aus, bis sich vor 55 Jahren herausstellte, dass sie (im Rahmen des gängigen axiomatischen Systems der Mathematik) weder beweisbar noch widerlegbar ist. Uff[8]! Die hehre Mathematik ist zwar widerspruchsfrei, aber u n v o l l s t ä n d i g!

Dass das Quadrat über dem Intervall von 0 bis 1 von gleicher Mächtigkeit ist, wie das Intervall selbst, wen wundert's? Nehmen Sie einen Punkt (x, y) aus dem Inneren des Quadrats. Als Dezimalzahlen lauten x und y wie folgt: $x = 0, x_1x_2x_3 \ldots$ und $y = 0, y_1y_2y_3 \ldots$ Daraus lässt sich e i n e Ziffernfolge konstruieren, die Zahl $0, x_1y_1x_2y_2x_3y_3 \ldots$, welche die kodierte Position des Punktes (x, y) enthält. Man braucht gar keine zwei Zahlenangaben, um einen Punkt auf einer Fläche anzugeben! Das ist erweiterbar. Die Dimensionalität ist angesichts des Unendlichen unerheblich. Ob Strecke, Fläche oder 10-dimensionaler Hyperraum, die Anzahl der darin befindlichen mathematischen Punkte ist immer bloß überabzählbar und stets die gleiche: $\aleph_c$.

Wird fortgesetzt!

[8] Dass logische Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit einander ausschließen, geht auf Kurt Gödel (1906–1978) zurück. K e i n Gedankengebäude, welches auf einem formalen Fundament beruht – z. B. Recht und Gesetz –, kann sich aus sich selbst heraus begründen. Es bedarf eines Darüberhinaus.